2017年6月1日交电磁学小论文

2017年春季2016级电磁学班级小论文竞赛

时间：6月8日上午11：30

本学期全校小论文竞赛大约安排如下：

时间：6月17日晚7：00

地点：物理学院二楼大会议室

第六章 静磁场中的磁介质

（对比第二章中的电介质6节）

§6.1 磁场对电流的作用

§6.2 磁介质及其磁化强度M

§6.3 磁介质中静磁场的基本定理

§6.4 介质的磁化规律

§6.5 边值关系和唯一性定理

* §6.6 磁像法

§6.7 磁路定理及其应用

* §6.8 磁荷法

§ 6.1 磁场对电流的作用

一.磁场对电流的力和力矩（温故知新）

研究磁场对物质的作用时，实际上是研究磁场对物质内部电流的作用。根据第五章5.1节介绍的洛伦兹力公式和安培力公式，我们可求得外磁场$\boldsymbol{B}$对运动点电荷、线电流、面电流和体电流系统的作用力如下：

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}, \qquad (6.1.1)$$

$$\boldsymbol{F} = \oint_L I d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B} \qquad (6.1.2)$$

$$\boldsymbol{F} = \iint_S \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{B} dS, \qquad (6.1.3)$$

$$\boldsymbol{F} = \iiint_V \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} dV. \qquad (6.1.4)$$

从安培力公式出发，还可以推出电流在外磁场中所受力矩的表达式，结果为:

$$\boldsymbol{L}=\oint_{L}\boldsymbol{r}\times(Id\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{B}) \qquad (6.1.5)$$

$$\boldsymbol{L}=\iint_{S}\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{B})dS \qquad (6.1.6)$$

$$\boldsymbol{L}=\iiint_{V}\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})dV \qquad (6.1.7)$$

应用上述公式，应先求出外磁场$\boldsymbol{B}$。有时候，由外磁场和受作用电流的磁场合成的总磁场$\boldsymbol{B}_t$容易计算。在这种情况下，应从$\boldsymbol{B}_t$中减去受作用电流的贡献$\boldsymbol{B}_1$才得到外磁场$\boldsymbol{B}$，即

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_t-\boldsymbol{B}_1. \qquad (6.1.8)$$

与静电场问题类似处理，将$\boldsymbol{B}_1$代之以**电流元自身**产生的磁感应强度即可，这不会影响最终结果。体电流元和面电流元在其附近产生的磁感应强度易于求得，结果如下：

（1）体电流元在其附近产生的磁感应强度为零，这是由于 $dV \sim r^3$，$B_1 \sim dV/r^2 \sim r$，$r \to 0$则 $B_1 \to 0$ (参看**例5-5**)。

（2）面电流元在其两侧产生的磁感应强度存在间断，大小为 $\mu_0 i/2$，方向相反并与面元相切（见**例5.7**）；可以预计，$\boldsymbol{B}_t$ 也存在同样性质的间断,以至按式(**6.1.8**)算出的$\boldsymbol{B}$ 不会有间断。

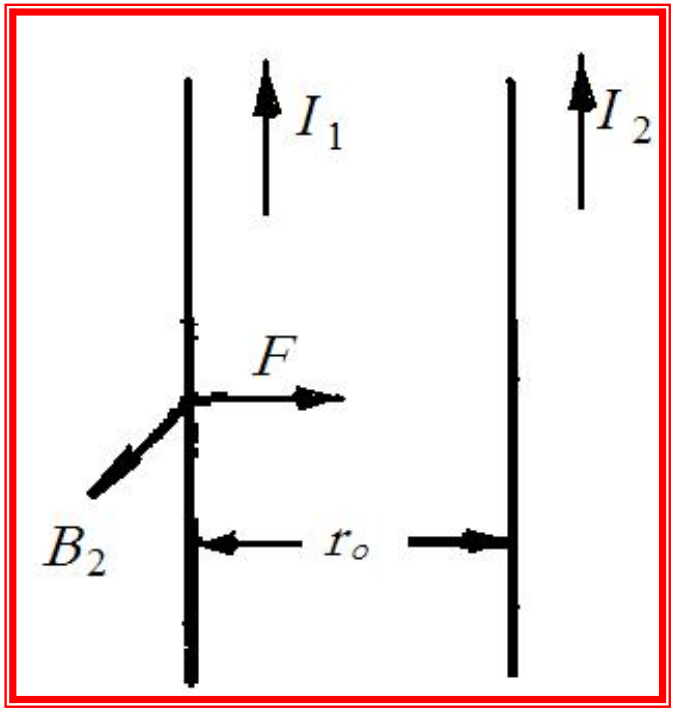
应当指出，上述分析**不能**推广到**线电流元**。可以证明，一个闭合线电流中的任一小段线电流所受的内力趋于无穷大；在需要分析这种内力时，我们**必须放弃线电流近似**，考虑它是有限截面尺寸的通电导线。

二、计算举例

[例6.1] 有两根无限长平行直载流导线，电流强度为 I_1、I_2，相距为 r_0，求其中一根单位长度受的力。

[解] 由例5.1的结果，导线2在导线1处产生的磁感应强度为

$B_2 = \mu_0 I_2 /(2\pi r_0)$，方向如右图所示。



再由式（6.1.2）求得导线1单位长度受力为:

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r_0} = 2\times 10^{-7}\,\frac{I_1 I_2}{r_0}.$$

当 I_1 和 I_2 同向时，该力为引力。1948年第九届国际计量大会直接从上式出发来定义电流强度的单位—“安培”。

[例6.2] 求一电流强度为I的载流线圈在均匀磁场B中所受的力和力矩。

[解] 由式（**6.1.2**）（对载流线圈，用dr代dl）得:

$$\boldsymbol{F}=\oint_L I d\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{B}=(\oint_L d\boldsymbol{r})\times I\boldsymbol{B}=0$$

即载流线圈在均匀磁场中受力为零。利用关系式:

$$\boldsymbol{r}\times(d\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{B})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{B}+\frac{1}{2}d[\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{B})]-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r})$$

和式（**6.1.5**），可求得:

$$\mathbf{L}=\frac{I}{2}\oint_L(\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{B}+\frac{I}{2}\oint_L d[\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{B})]-I\boldsymbol{B}\oint_L \boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

$\oint_L d[\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{B})]=0$，$\oint_L \boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}=0$

上式右边的积分项在例5.3中曾碰到并处理过。**第一项**为$\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{m}$为载流线圈的磁矩；**第二项**为全微分的闭路积分，其值为零；**第三项**由于 $\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}=d(r^2/2)$ ，其值也为零。这样，载流线圈在均匀磁场中受的力矩为：

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}. \qquad \textbf{(6.1.9)}$$

如果在非均匀外磁场中，只要线圈尺寸远小于磁场的非均匀尺度，则相对于线圈中心点而言，线圈所受的力矩仍由式（**6.1.9**）表示，不过线圈受力不再是零。

[例6.3] 求电流强度为I、单位长度匝数为n的无穷长螺线管单位表面受力。

[解] 由例**5.6**，无穷长螺线管在管内外沿轴向的B_t分别为$\mu_0 nI$和0。由例**5.7**，考虑到面电流密度为$i = nI$，

则螺线管面元ΔS对内、外侧磁场的贡献为$\pm\mu_0 nI/2$。**于是**，对受作用面元ΔS而言，按式（**6.1.8**）算得的**外磁场**为$\mu_0 nI/2$。

进一步可根据式（**6.1.3**）计算单位面积面元受力，结果为:

$$\frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{|\boldsymbol{i}\Delta S \times \boldsymbol{B}|}{\Delta S} = \frac{i\Delta S}{\Delta S}\frac{\mu_0 nI}{2} = i\frac{\mu_0 nI}{2} = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2.$$

该力的方向垂直于面元并指向螺线管外侧。

■类似于例**5.6**，若考虑螺线管存在一等效的轴向电流I，则该电流的面密度为$i_{//} = I/(2\pi R)$。仿照上述步骤即按式（**6.1.8**）算得管面上的外磁场为$B_{\perp} = \mu_0 I/(4\pi R)$，它与管面相切并与管轴垂直。因此，单位面积面元受一指向管轴的力，大小为：

$i_{//}B_{\perp} = \mu_0 I^2/(8\pi^2 R^2)$。一般情况下，这力比上面指向螺线管外侧的力小得多，可忽略不计。

§ 6.2 磁介质及其磁化强度M

磁体具有吸引铁磁性物质的能力，并把这种能力定义为**磁性**。这里不仅磁体具有磁性，而且被吸引着的铁磁性物质也具有磁性。

处于磁场中的其它物质都或多或少具有磁性，只是远不如铁磁性物质的磁性那样强。使物质具有磁性的物理过程叫做**磁化**，而一切能够磁化的物质叫做**磁介质**。

下面我们来分析磁介质磁化的**定量描述**、实验规律和微观机制。

一、 磁化强度

根据**安培分子电流假说**，已磁化物质的磁性来源于物质内部有规则排列的分子电流，即分子磁矩。用量 $\Sigma \boldsymbol{m}_{分子}$ 表示体积元 ΔV 中所有分子磁矩的矢量和，

则定义：

$$M=\frac{\Sigma m_{分子}}{\Delta V} \qquad (6.2.1)$$

为**磁化强度**。磁化强度为矢量，其方向代表磁化的方向，其大小代表磁化的程度。在非磁化状态下，或分子固有磁矩为零，或分子磁矩的取向杂乱无章，以至 $\Sigma m_{分子}=0$ 。于是，$M=0$ 表示磁介质处于非磁化态。

二、磁化电流

在磁化状态下，由于分子电流的有序排列，磁介质中将出现宏观电流，称为**磁化电流**。其特点是：

1. 磁化电流的产生不伴随电荷的宏观位移。相反，凡伴随电荷的宏观位移的电流称为传导电流，例如载流导体中的电流；

2. 磁化电流可存在于一切磁介质（包括绝缘体和导体）中，**不具有焦耳热效应**；传导电流则只能存在于导体（包括半导体和电离气体）中，具有焦耳热效应。

■ **尽管两种电流在产生机制和热效应方面存在区别，但在激发磁场和受磁场作用方面却是完全等效的。**

三、磁化电流与M的关系： 既然磁化电流的出现是物质磁化的结果，它和磁化强度之间应该存在一定关系。为分析这种关系，我们引入分子平均磁矩m_a，其定义如下：

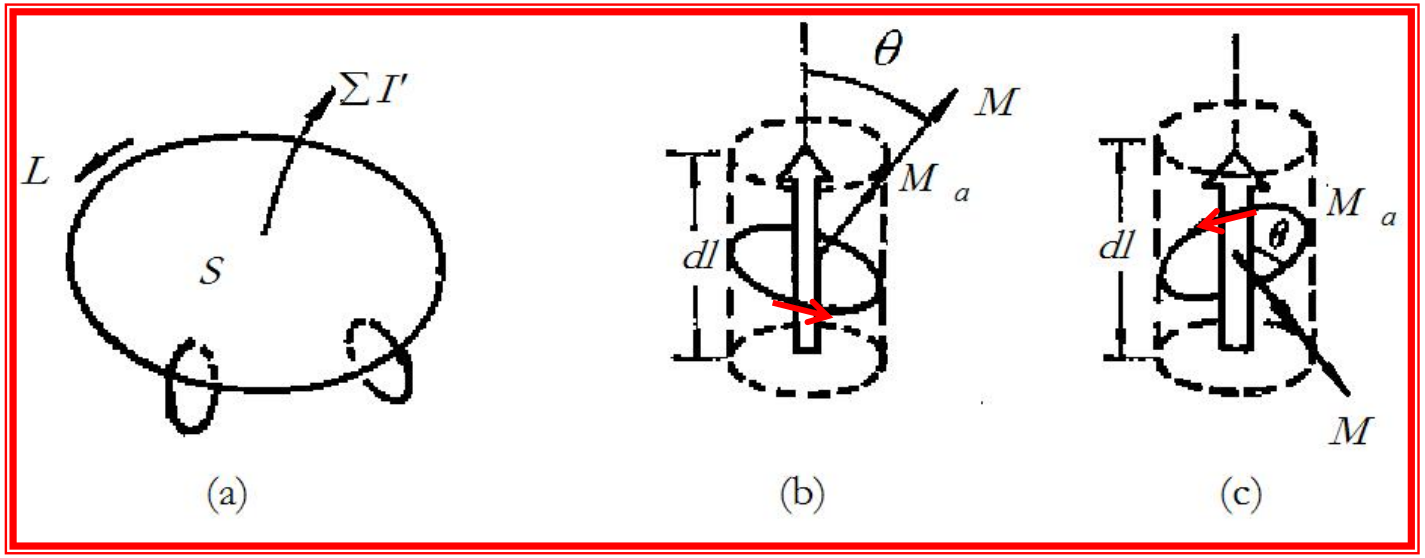
$$m_a = \frac{\Sigma m_{分子}}{n\Delta V}, \qquad (6.2.2)$$

式中n为分子数密度。

这样，式（6.2.1）变成：$M = nm_a.$ (6.2.3)

进一步设 m_a 由一等效分子电流所产生，其电流强度为 I_a，面积矢量为 S_a，则：$m_a = I_a S_a.$ (6.2.4)

■ 研究磁化电流与M的关系。假定 介质中, 全部分子具有同一磁矩 m_a , 考虑磁介质中任一闭合回路L和以它为周线的曲面S，通过S的总磁化电流设为 $\Sigma I'$ ，其正向与回路L的绕行方向满足右手定则（见下图（a））。



显然，只有那些从S内穿过并在S外闭合的分子电流才对 $\Sigma I'$ 有贡献；其它分子电流，或者来回穿过S，或者根本不与S相交，对 $\Sigma I'$ 的净贡献为零。

■ 考虑L上一段弧元dl，其方向沿回路绕行方向。设在dl处磁化强度M与dl的夹角为 θ 。先分析 $0 \le \theta \le \pi/2$ 的情况。不难看出，对 $\Sigma I'$ 有贡献的分子的中心应位于前页的图（b）所示的圆柱体中，大小为：

$$\Delta \sum I' = I_a n S_a \cos\theta \, dl = n \mathbf{m}_a \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$$

当 $\pi/2 < \theta \le \pi$ 时（见前页图(c)），上式也成立，所得磁化电流为负。**M**的环量为将上式沿L积分，得到它与穿过S的总磁化电流的关系：

$$\oint_L M \bullet dL = \sum_{\text{穿L}} I' . \qquad (6.2.5)$$

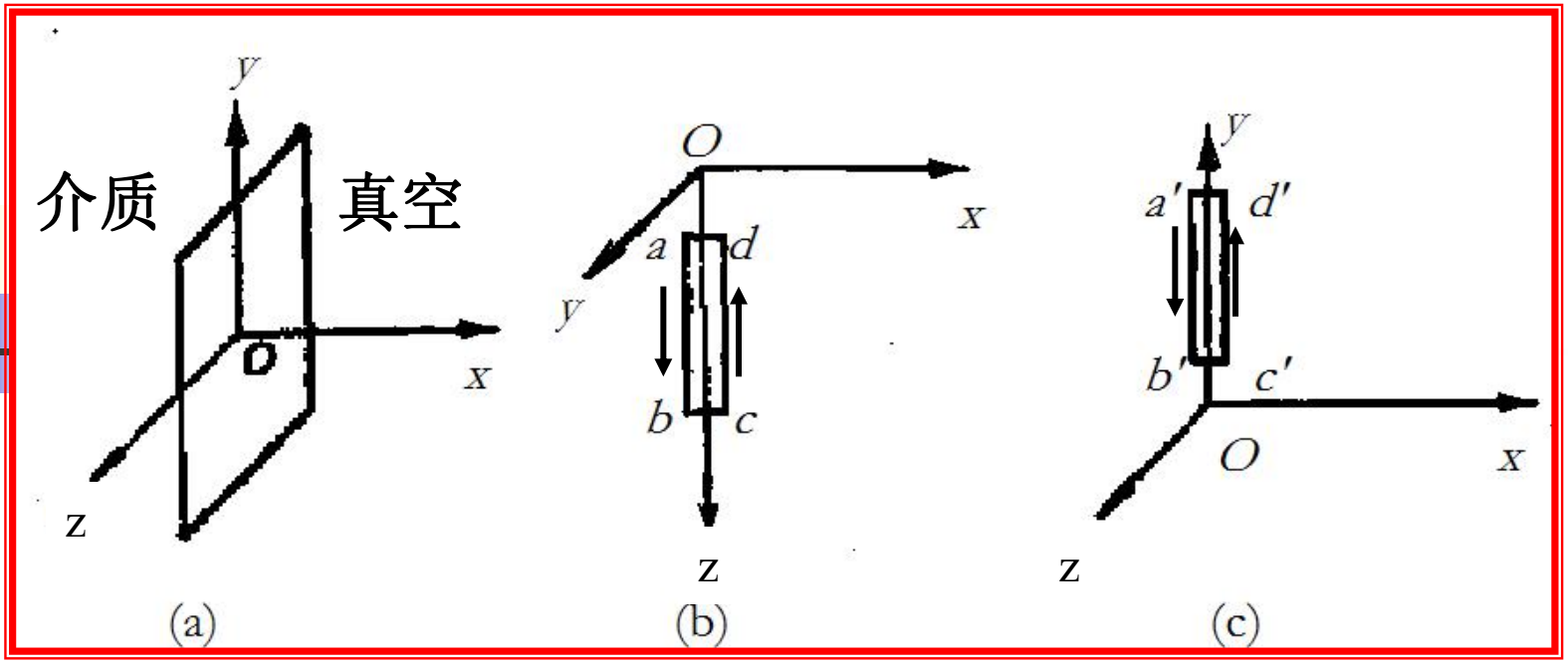
说明：这一关系**不仅**对介质内部的回路成立，**而且**对跨过介质界面的回路也成立。如果**介质均匀磁化**，即 M=常量，则

$$\oint_L \boldsymbol{M}\cdot d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{M}\cdot\oint_L d\boldsymbol{l} = 0$$

即**均匀磁化介质内，磁化电流为零**。

■ **研究磁化面电流与M的关系。**磁化电流不仅出现在**非均匀**磁化介质中，还常以面电流形式存在于**介质表面**。下面来分析**磁化面电流**和磁化强度之间的关系。

考虑**介质表面**上任一面元，设其内侧磁化强度为 M；外侧为真空。取直角坐标系 $Oxyz$，使 y-z **平面**与**所考虑的面元相切**，x **轴指向面元外法线方向**（如下页图（a））。



■ 在*x-z*平面作一矩形回路*abcd*，使之横跨*z*轴，*ab*位于介质内，*cd*位于介质外，并规定其绕行方向与*y*轴方向满足右手定则（图(b)）。取 $\overline{ad} \ll \overline{ab}$，则由式（**6.2.5**）有

$$M_z \overline{ab} = i'_y \overline{ab}, \quad \text{即} \quad i'_y = M_z .$$

■ 进一步在*x-y*平面内作一矩形回路*a'b'c'd'*，按上述规定取 $\overline{a'd'} \ll \overline{a'b'}$，则由式（**6.2.5**）有

$$-M_y \overline{a'b'} = i'_z \overline{a'b'}, \quad \text{即} \quad i'_z = -M_y .$$

上述磁化面电流和表面磁化强度之间的分量关系可归纳为如下矢量关系：

$$\boldsymbol{i}' = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{n} \qquad (6.2.6)$$

式中$\boldsymbol{n}$为介质表面单位外法向矢量，此处即x轴的方向。

§6.3 磁介质中静磁场的基本定理

磁介质的**全部作用**在于提供磁化电流作为附加场源。设由传导电流和磁化电流产生的磁感应强度分别为 $\boldsymbol{B}_0$ 和 $\boldsymbol{B}'$，则总磁感应强度为

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}'. \qquad \textbf{(6.3.1)}$$

显然，$\boldsymbol{B}$应满足真空中静磁场的高斯定理和安培环路定理：

$$\begin{cases} \oiint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = 0 & \textbf{(6.3.2)} \\ \oint_L \boldsymbol{B}\bullet d\boldsymbol{L} = \mu_0 \sum_{\text{穿L}} I_0 + \mu_0 \sum_{\text{穿L}} I'. & \textbf{(6.3.3)} \end{cases}$$

只要已知传导电流 I_0 和磁化电流 I' 的分布，就可决定磁介质内、外的静磁场。

[例6.4] 求沿轴均匀磁化的磁介质圆棒轴线上的磁场分布。设圆棒长为l，半径为R，磁化强度为M。

[解] 由于是沿轴向均匀磁化，M// 轴，故磁化电流只分布于介质棒的侧面，其面电流密度为$i'=M$。

这种电流分布与一有限长直螺线管电流等效。照搬例**5.4**的结果（令$nI=i'$），可推得磁介质圆棒轴线上距左端ℓ_1处的磁感应强度为：

$$B'=\frac{\mu_0 nI}{2}(\cos\beta_2-\cos\beta_1)=\frac{\mu_0 M}{2}\left(\frac{l_1}{\sqrt{R^2+l_1^2}}+\frac{l_2}{\sqrt{R^2+l_2^2}}\right),$$

式中$l_2=l-l_1$。对细长棒（$l>>R$），端点$(l_1=0)$处，$B'=\mu_0 M/2$；棒内远离端点处$B'\approx\mu_0 M$。对圆薄片（$l<<R$），$B'=\mu_0 Ml/(2R)\approx 0$。

■ 大多数情况下问题并非如此简单。这是因为磁介质在外磁场中磁化，磁化后的介质又会改变空间的磁场分布，并反过来影响磁介质的磁化状态。这种相互牵制的关系使我们**难以**自洽地决定介质的磁化强度或磁化电流的分布。

■ 类似情况在第二章**2.6**节讨论电介质时也曾碰到过。当时我们的做法是引入电位移矢量。对于磁介质中的静磁场，将式（**6.2.5**）代入式（**6.3.3**）得：

$$\oint_L \boldsymbol{B}\bullet d\boldsymbol{L}=\mu_0\sum_{\text{穿L}} I_0+\mu_0\oint_L \boldsymbol{M}\bullet d\boldsymbol{L};\qquad \oint_L\left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}\right)\bullet d\boldsymbol{L}=\sum_{\text{穿L}} I_0.$$

令：

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M},\qquad (6.3.4)$$

立即得：

$$\oint_L \boldsymbol{H}\bullet d\boldsymbol{L}=\sum_{\text{穿L}} I_0\qquad (6.3.5)$$

$$\oint_L \boldsymbol{H} \bullet d\boldsymbol{L} = \sum_{\text{穿L}} I_0 \qquad (6.3.5)$$

■ 这就是经过变形之后的磁介质中**静磁场的安培环路定理**，它的右边不再出现磁化电流。后面，我们将会看到，对于线性各向同性介质且具有一维对称性的情况，可用式（**6.3.5**）安培环路定理简化求静磁场的计算。

■ 式（**6.3.2**）和式（**6.3.5**）涉及两个物理量***B***和***H***，还必须通过引入***B***和***H***之间的关系才能完全确定静磁场的具体形式。这说明，在引入辅助矢量***H*** 之后，表面上回避了直接计算磁化电流的复杂性，但却带来了分析***B***和***H***的关系的新问题。下面我们就来分析这一关系，即介质的磁化规律。

§6.4 介质的磁化规律

一、介质按磁化规律的分类

介质的磁化规律，即**M和B的关系**，是由**实验决定**。由于历史的原因，人们常用M和H之间的关系来表达介质的磁化规律。实验表明，对**线性各向同性磁介质**：

$$\boldsymbol{M}=\chi_m \boldsymbol{H}. \tag{6.4.1}$$

将上式代入式（**6.3.4**）求得磁介质的**性能方程**：

$$\mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M})=\mu_0(1+\chi_m)\mathbf{H}=\mu\mathbf{H} \tag{6.4.2}$$

式中：

$$\mu=\mu_0(1+\chi_m)=\mu_0\mu_r \tag{6.4.3}$$

χ_m称为**磁化率**，μ称为**磁导率**。在真空$\boldsymbol{M}=0$，$\chi_m=0$，$\mu=\mu_0$。称μ为绝对磁导率，$\mu_r\equiv\mu/\mu_0$为相对磁导率。

磁介质按磁化规律不同可分为以下几类：

(1) 顺磁质和抗磁质

有的磁介质 $\chi_m > 0$，$\mu > \mu_0$，称为**顺磁质**；有的磁介质 $\chi_m < 0$，$\mu < \mu_0$，称为**抗磁质**。这两种磁介质的磁化率的绝对值都很小，前者约在 $10^{-4} - 10^{-5}$ 之间，后者约在 $10^{-5} - 10^{-7}$ 之间（见表**6.1**），都属于**弱磁性物质**。

■ 实验发现**一般抗磁质**的磁化率**不随**温度变化而改变；而**一般顺磁质**的磁化率**与温度T成反比**关系，遵从居里定律：

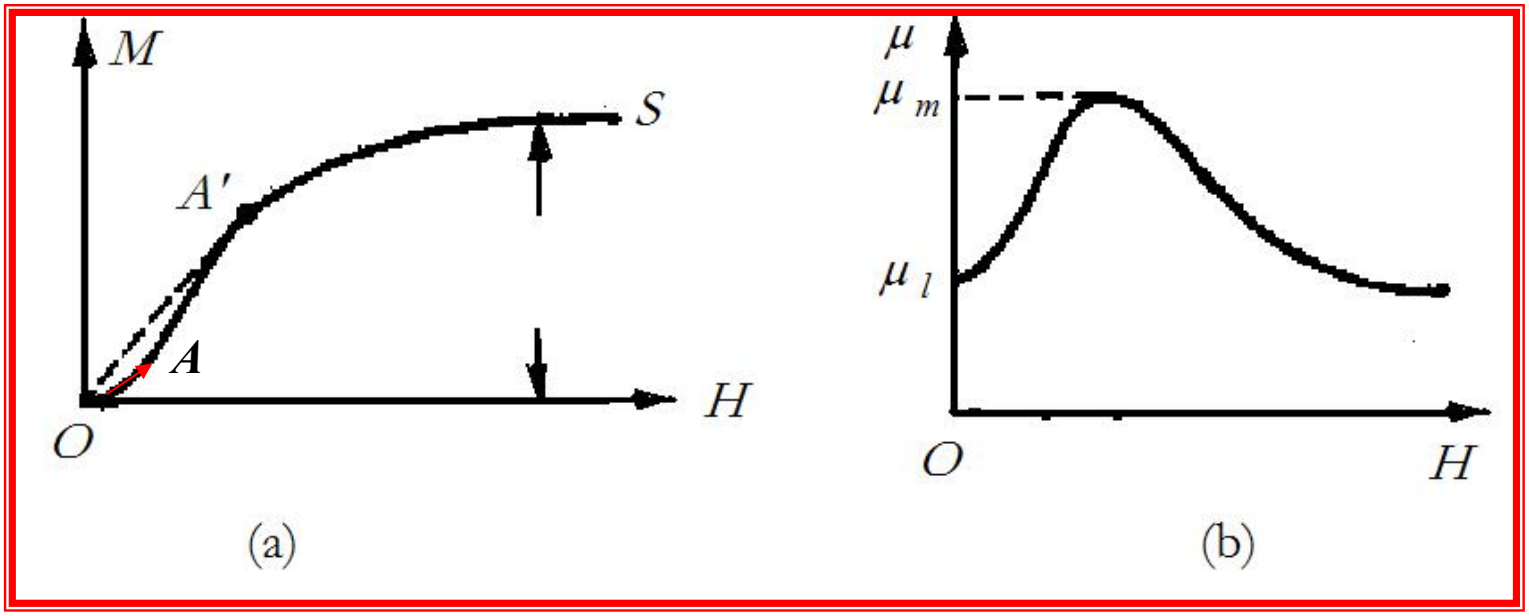
$$\chi_m = C / T, \qquad \textbf{(6.4.4)}$$

式中***C***是居里常数，由实验确定。

■ 对**各向异性磁介质**（例如晶体介质），***M***和***H***的方向不一样，相应的**磁化率**和**磁导率均为张量**。

(2) 铁磁质

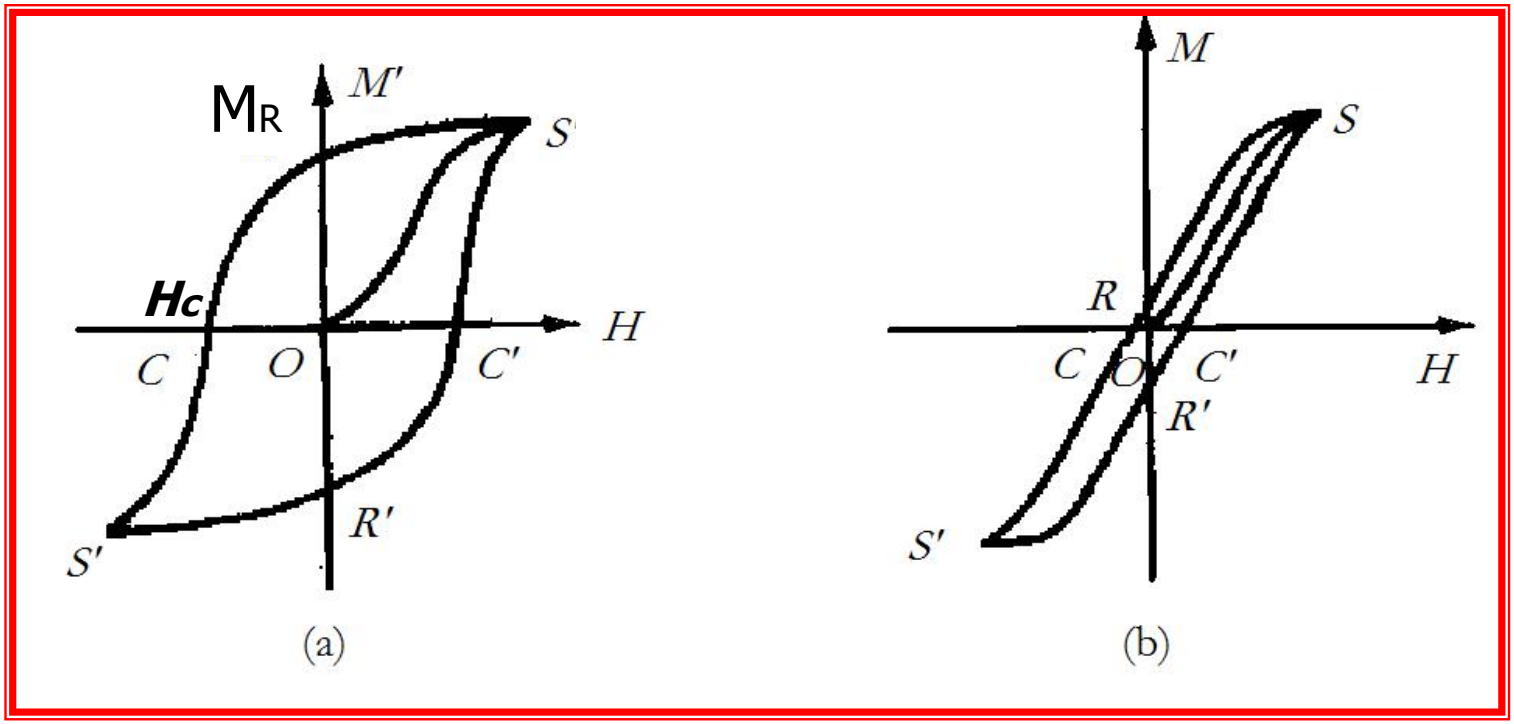
对铁磁质，例如铁、钴、镍，M的值相当大，M和H间的函数关系复杂，且与磁化的历史有关。下面简述一下铁磁质的磁化规律的典型特征。



(a)起始磁化曲线和 (b) $\mu - H$ **曲线**

■闭合磁化曲线*SRCS'R'C'S*称为**磁滞回线**。

■按照矫顽力H_c的大小，可把铁磁质划分为**硬磁材料**和**软磁材料**两大类。**前者**矫顽力大，磁滞回线较宽（见下图**(a)**）；**后者**矫顽力小，磁滞回线较窄（见下图**(b)**）。



磁滞回线

■ **硬磁材料**在外加磁场为零时仍保留较强的剩余磁化强度，且不易退磁，适合于**制作永久磁铁**；而**软磁材料**则**作为高导磁材料**广泛应用于各种电子和电工设备之中。

■ **人造铁氧体**，例如钡铁氧体、锶铁氧体等属于**硬磁材料**；锰锌铁氧体（**Mn、Zn、Fe_2O_4**按一定比例制成的晶体）、镍锌铁氧体等属于**软磁材料**。

■ **典型的软磁材料**，如纯铁、硅钢、坡莫合金（**Ni，Fe**合金）等，其最大的相对磁导率 μ/μ_0 和磁化率 χ_m 位于 $10^3 - 10^5$ 之间，甚至更大；

■ **典型的硬磁材料**的剩余磁感应强度 $B_R = \mu_0 M_R$，如碳钢为**1 T**，钕铁硼合金（**$Nd_{15}B_8Fe_{77}$**）为**1.23 T**，它们都具有强磁性。

■ 将铁磁质加热到高于其居里温度 T_c（或称居里点），其铁磁性消失，转变为顺磁性，磁化率与温度关系满足居里—外斯定律：

$$\chi_m = \frac{C}{T - T_c}, \qquad (6.4.6)$$

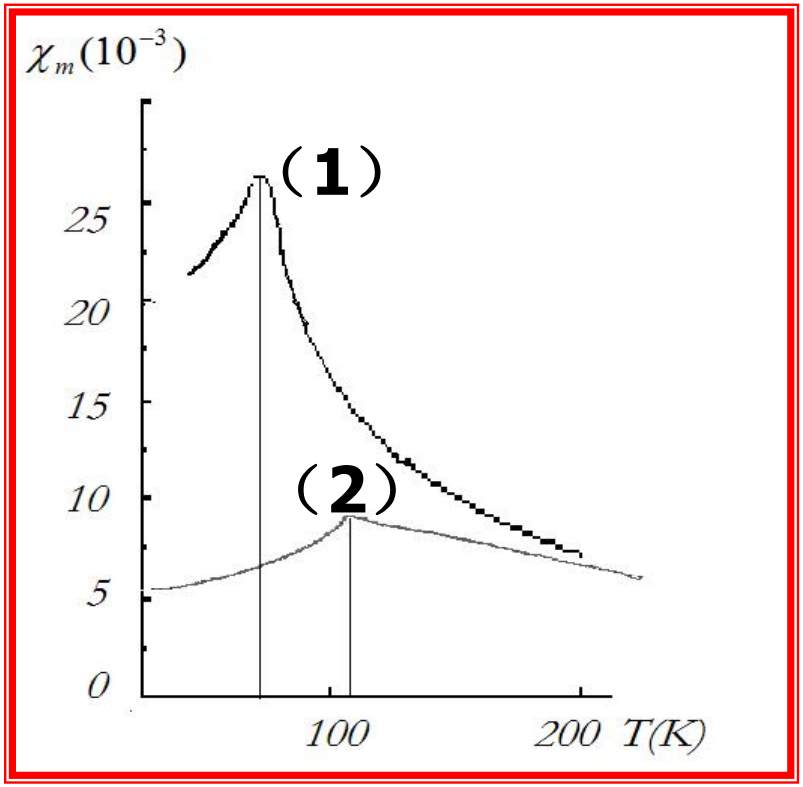
式中C为居里常数，T_c 为居里温度，二者通过实验确定。例如铁、钴、镍的居里温度分别为1040 K、1395 K、628 K。

(3) 亚铁磁质和反铁磁质

20世纪四、五十年代研制成功大批铁氧体材料、过渡族与稀土族化合物，广泛被应用于各类高新技术领域，它们绝大多数都是亚铁磁性的。

■在20世纪三十年代以前，只把物质按磁性分成三类：抗磁质、顺磁质、铁磁质。例如人类最早发现的天然磁石（Fe_3O_4）一直被视为铁磁质。后来，通过对其微观机理的深入研究，才认识到它属于亚铁磁质。亚铁磁性属于强磁性。亚铁磁质的宏观磁性与铁磁质很相像，从它们的磁化曲线和磁滞回线很难找出与铁磁质的差别。

■20世纪三十年代，从实验中观测到若干物质的磁化率—温度关系曲线上出现极大的现象（见右图），这类物质属于弱磁性物质，后来发现它们是反铁磁质。



MnF_2(1)和MnO(2)的磁化率—温度曲线

■ 早期由于不了解其磁结构，人们把它看成一类特殊的顺磁质。20年后，到20世纪五十年代初，法国物理学家奈尔用中子衍射法确定反铁磁质的磁结构，发现每种反铁磁质存在一特定温度：

在该温度以下，磁化率随温度降低而减小，表现出反铁磁性；在该温度以上，磁化率随温度增加而减小，转变成顺磁性。称该温度为奈尔温度或奈尔点，常用 T_N 表示。

■ 奈尔还建立了亚铁磁质的分子场理论，给人造铁氧体磁性材料的开发提供了理论指导，他因此获得了1970年诺贝尔物理奖。

二、介质磁化的微观机制（模型法）

- 磁化规律是磁场和物质相互作用的宏观描述。

- 与电介质的极化类似，**磁化的物理机制**与物质的微观结构有关。不过，物质的微观结构及有关运动规律相当复杂，涉及到各种量子效应，对它们的严格分析已超出经典电磁学的范围，**量子力学才是研究物质磁性的钥匙**。

- 下面我们限于最简单的物质结构模型，从**经典理论**出发对顺磁质和抗磁质的磁化的微观机制作出说明。

再用**简化的量子概念**定性说明铁磁质、亚铁磁质与反铁磁质的磁化机理。

(1) 顺磁质。顺磁质由具有一定磁矩的分子组成。

■ 分子的磁矩来源于分子中电子的轨道运动所产生的轨道磁矩，以及电子本身所固有的自旋磁矩，而原子核的磁矩比它们要小近三个量级。一个分子内全部电子的磁矩的矢量和，称为分子的固有磁矩。

■ 对顺磁质，分子固有磁矩$m_0 \neq 0$。不加外磁场时，由于分子的热运动，各分子磁矩取向无规则，互相抵消，宏观磁矩为零。在外磁场中，分子将在磁力矩$\boldsymbol{m}_0 \times \boldsymbol{B}$的作用下出现$\boldsymbol{m}_0$顺着外场方向排列的趋势，由此产生与外场方向一致的磁化强度，这就是顺磁效应的来源。

*■ 1905年，**朗之万**对这一效应进行了简单的经典统计分析：设诸分子的固有磁矩$\boldsymbol{m}_0$大小相同。考察单位体积中分子磁矩在空间的取向分布。设分子数密度为n_0，

$dn(\theta,\varphi)$表示单位体积中，磁矩$\boldsymbol{m}_0$的方向角位于$\theta\sim\theta+d\theta$、$\varphi\sim\varphi+d\varphi$之中的分子数目。当**不存在外磁场**时，分子磁矩取向在各个方向机会均等，应有：

$$dn(\theta,\varphi)=n_0\frac{\sin\theta d\theta d\varphi}{4\pi}.$$

■ 如果只考虑磁矩极角位于$\theta\sim\theta+d\theta$之间的分子数，方位角φ可以任意，则可由上式对φ积分求得，即

$$dn(\theta)=\frac{n_0}{2}\sin\theta d\theta. \qquad \textbf{(6.4.7)}$$

*■ 当在z轴方向**存在外磁场$\boldsymbol{B}$时**（见下页图），由热学结果，分子磁矩取向**满足玻尔兹曼分布律**：

$$dn(\theta) = Ce^{-\frac{\varepsilon_p}{kT}} \sin\theta d\theta, \qquad \textbf{(6.4.8)}$$

ε_p 为磁矩分子在外磁场中的“势能”，其表达式为（见第八章8.5节）

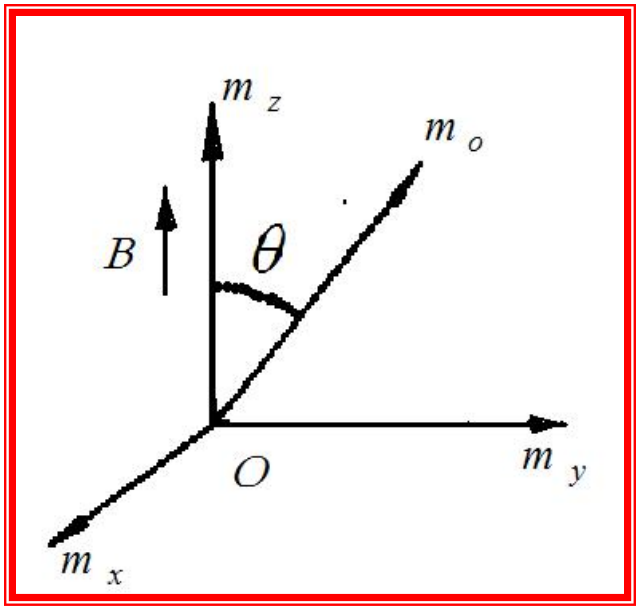
$$\varepsilon_p = -\boldsymbol{m}_0 \cdot \boldsymbol{B} = -m_0 B\cos\theta. \qquad \textbf{(6.4.9)}$$

将上式代入式（**6.4.8**），设 $|\varepsilon_p| << kT$（通常这一条件满足，见习题**6.8**），则近似有

$$dn(\theta) = C\left(1 + \frac{m_0 B}{kT}\cos\theta\right)\sin\theta d\theta. \qquad \textbf{(6.4.10)}$$

由归一化条件：

$$\int dn(\theta) = \int_0^{\pi} C\left(1 + \frac{m_0 B}{kT}\cos\theta\right)\sin\theta d\theta = n_0,$$



可定出常数 $C=n_0/2$. 于是，式（6.4.10）化为:

$$dn(\theta)=\frac{n_0}{2}\left(1+\frac{m_0B}{kT}\cos\theta\right)\sin\theta d\theta. \qquad (6.4.11)$$

*■根据上述分布函数，不难求得介质磁化强度的大小为:

$$M=\int m_0\cos\theta dn(\theta)=\frac{m_0n_0}{2}\int_0^{\pi}\cos\theta\left(1+\frac{m_0B}{kT}\cos\theta\right)\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{n_0m_0^2}{3kT}B\approx\frac{\mu_0n_0m_0^2}{3kT}H,$$

其方向与***B***或***H***同向。将上式写成矢量形式:

$$\boldsymbol{M}=\frac{\mu_0n_0m_0^2}{3kT}\boldsymbol{H}, \qquad (6.4.12)$$

再与式（6.4.1）比较，可求得磁化率的表达式:

$$\chi_m = \frac{\mu_0 n_0 m_0^2}{3kT}. \qquad (6.4.13)$$

■上式表明：当n_0一定时，磁化率和温度成反比，由此可解释居里定律(6.4.4)。式（6.4.13）成立的条件为:

$$\frac{m_0 B}{kT} << 1 \qquad (6.4.14)$$

■即磁场不能太强，温度不能过低。对于气态顺磁质，式（6.4.13）与实验结果符合。但对某些液态和固态顺磁质，式（6.4.13）不成立，这是由于我们所采用的理想模型不足以精确描述这类介质的微观特性。

(2) 抗磁质。 它的分子的固有磁矩$m_0=0$。

■ 在外磁场作用下，分子中每个电子的轨道运动将受到影响而引起附加轨道磁矩。这一附加磁矩总是逆着外磁场的方向，由此产生与外磁场方向相反的磁化强度，这就是抗磁效应的来源。

*■ 为分析这种效应，考虑某个电子绕核的轨道运动，角速度为ω，轨道半径r，则该电子的轨道磁矩大小为：

$$m=\pi r^2 I=-\pi r^2 e\omega/(2\pi)=-er^2\omega/2$$

可写成如下矢量形式：

$$\boldsymbol{m}=-\frac{er^2}{2}\boldsymbol{\omega}. \qquad (6.4.15)$$

在外磁场B中，该电子受到如下力矩：

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}. \qquad (6.4.16)$$

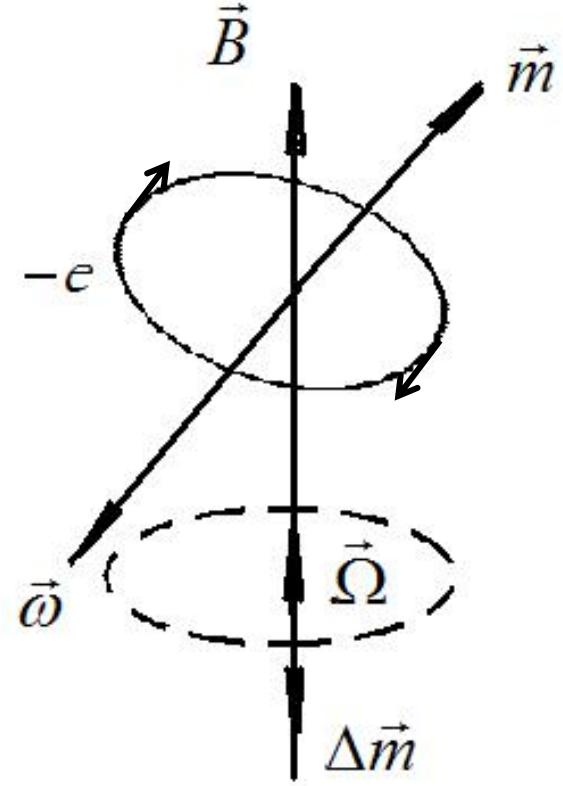
*■ 在该力矩作用下，电子轨道面将绕**B**进动(见右下图)。通常外磁场的洛仑兹力远小于分子内的库仑力，以至进动角速度Ω的大小将远小于ω。由力学结果，下述近似关系成立：

$$\mathbf{L} = m_e r^2 \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \textbf{(6.4.17)}$$

式中m_e为电子质量，$m_e r^2$是电子的轨道转动惯量。将式（6.4.15）和式（6.4.16）代入上式可得：

$$\Omega = \frac{e}{2m_e} B. \quad \textbf{(6.4.18)}$$

上式表明，电子轨道面的进动角速度总是与外磁场同向。上述电子的进动将引入附加磁矩，该磁矩与Ω或**B**的方向相反。



电子在外磁场中的进动与附加磁矩

*■ 下面计算附加磁矩的统计平均值。设电子轨道面的各种取向机会均等，则电子将沿以r为半径的球面等几率分布，形成一面密度$\sigma = -e/(4\pi r^2)$ 的均匀球面电荷。各种轨道取向的电子以 Ω 进动的平均效应相当于上述球面电荷以 Ω 自转，其磁矩为（见习题**5.9**）

$$\Delta \boldsymbol{m} = -\frac{er^2}{3}\boldsymbol{\Omega} = -\frac{e^2 r^2}{6m_e}\boldsymbol{B}. \qquad \textbf{(6.4.19)}$$

上式表示**一个轨道**电子对附加磁矩的平均贡献。

*■ 设一个分子中电子总数为 Z（对单原子分子，Z为原子序数），单位体积中分子数目为 n_0，则

$$\mathbf{M} = n_0 Z\overline{\Delta \mathbf{m}} = -\frac{n_0 Z e^2 \overline{r^2}}{6m_e}\mathbf{B} \approx -\frac{\mu_0 n_0 Z e^2 \overline{r^2}}{6m_e}\mathbf{H}, \qquad \textbf{(6.4.20)}$$

其中

$$\overline{r^2} = \left[\sum_{i=1}^{Z} r_i^2\right]/Z$$

- 对比式（6.4.1）和式（6.4.20），可求得磁化率为：

$$\chi_m = -\frac{\mu_0 n_0 Z e^2}{6 m_e}\overline{r^2}. \qquad (6.4.21)$$

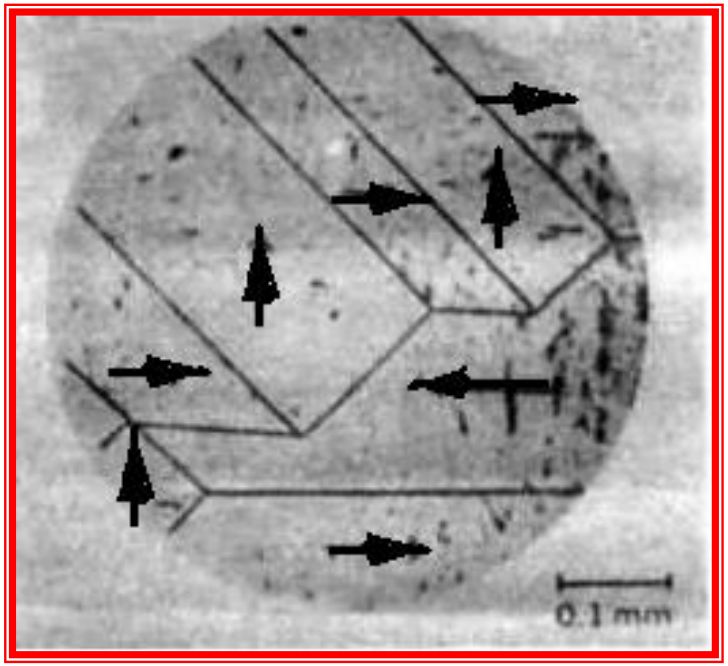
注意对给定的 n_0，磁化率与温度无关。按式(6.4.21)计算的抗磁质的磁化率与实验结果相当符合。对顺磁质而言，上述抗磁效应仍然存在，但总是远远小于顺磁效应。

(3) 铁磁质、亚铁磁质和反铁磁质。

- 金属铁是人类发现最早的铁磁性材料。对各类含铁的磁介质的磁性起源的认识，一直到20世纪七十年代还有人提出新的理论模型，可见定量解释其磁性的难度。

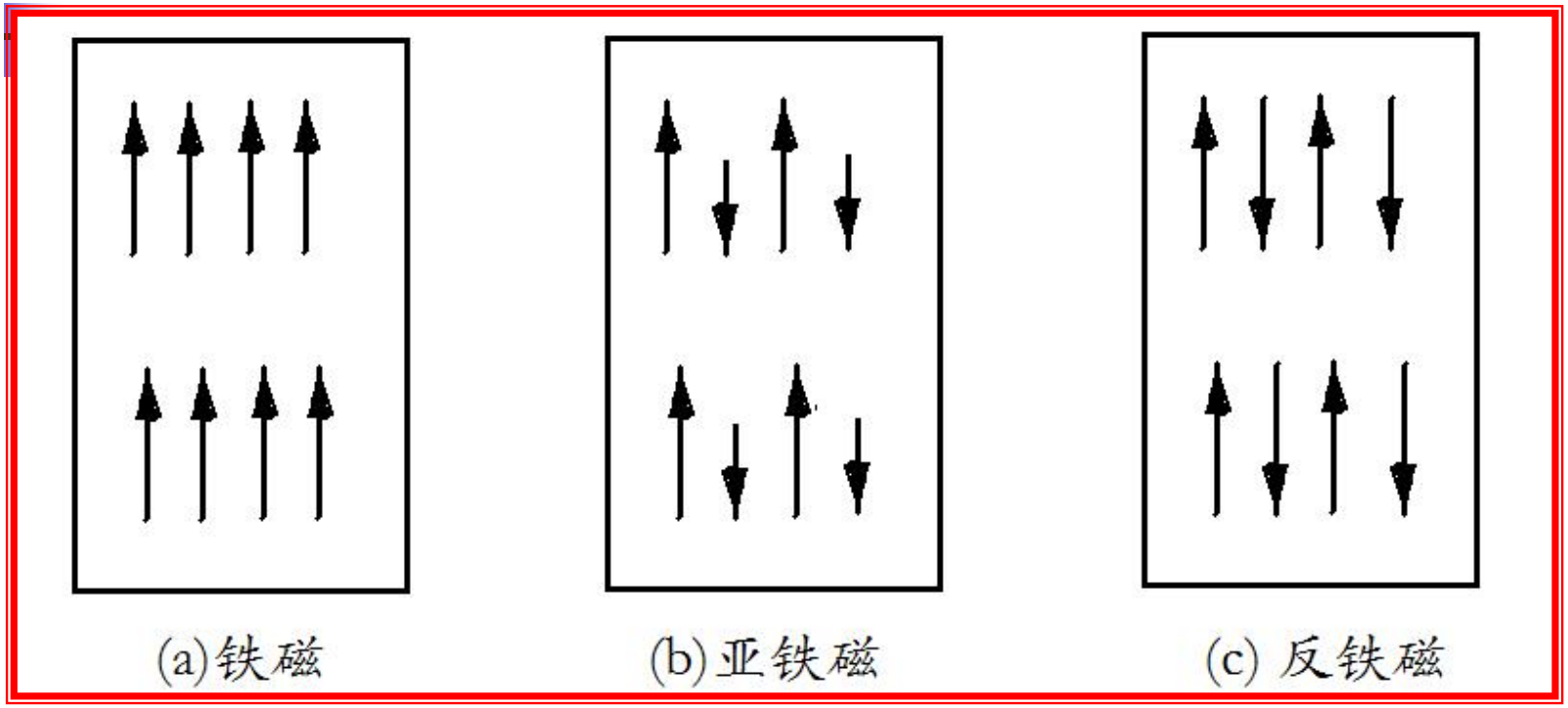
■ 目前取得的共识是：各类含铁的磁介质$m_0 \neq 0$，与顺磁质的主要区别在于其内部存在**强的交换作用**。交换作用完全是一种量子效应。在铁磁质、亚铁磁质和反铁磁质内部的这种交换作用，使得原子或分子磁矩按某种方式有序排列，形成许多小区域，称为**磁畴**。

1907年外斯就提出了**磁畴假说**，令人们半信半疑。直到**1948**年**毕特**发明用**磁粉**（Fe_3O_4的小磁粒）**纹法**显出磁畴结构，并用显微镜观察到铁磁体内有沿不同方向自发磁化的磁畴（见右图），磁畴假说才被公认。



磁畴示意图，箭头表示各磁畴的磁化方向，实线给出磁畴边界

■铁磁质、亚铁磁质和反铁磁质内有许多个磁畴。由于交换作用的不同，这三种磁介质的**单个磁畴内**的磁有序状态不同（见下图），呈现的所谓自发磁化各异。



（a）铁磁质的原子或分子磁矩彼此平行排列。

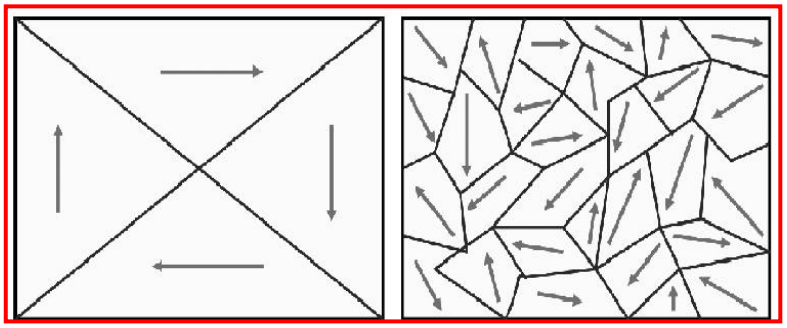
（b）亚铁磁质的原子或分子磁矩彼此**反平行排列**，但彼此反向的**磁矩大小不等**，产生**净剩余磁矩**。该净剩余磁矩在一个磁畴的范围内彼此平行，所以亚铁磁质的磁化特性很像铁磁质。

（c）反铁磁质的原子或分子磁矩彼此反平行排列，且彼此反向的磁矩大小相等，完全抵消。这些磁结构可由中子衍射法一类实验检测出来。

它们的磁化行为的定性解释

■ 在某一特定温度以上，亚铁磁质和反铁磁质的磁有序状态都会消失，转变成顺磁态，这一特性与铁磁质一样。此时原子或分子的热动能大于交换作用能，磁畴消失。在转变温度以下，由于微观磁结构的不同，它们在宏观的磁化特性上也不相同。

■ 对于铁磁质而言，在无外磁场时，各磁畴的自发磁化方向不同，宏观上不显示磁性（见右图）。

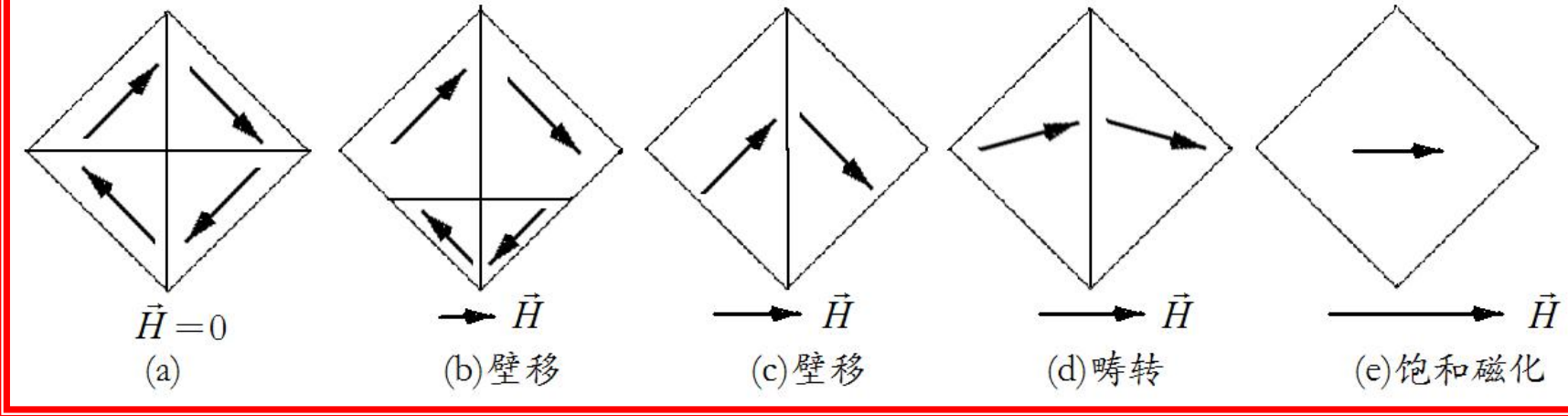


（a）单晶　（b）多晶

铁磁质内磁畴结构示意图

■ 当加上外磁场时，**铁磁质**的磁化有两种方式：一种叫“**壁移过程**”，另一种叫“**畴转过程**”；实际的磁化过程经常是壁移和畴转两种过程交叉或同时进行。

下图给出一个示例：随着磁场增大，先是“壁移”，然后是“畴转”，使铁磁质最终达到饱和磁化。**铁磁质以磁畴为单元磁化**，比以单个分子为单元磁化抗热干扰的能力强，容易磁化，因此磁化率很大。



铁磁质磁化示意图

*■ **亚铁磁质**有自发磁化和磁畴结构，宏观磁性与铁磁质很相似，磁化过程与铁磁质也很相似；从磁化曲线和磁滞回线很难找出它们与铁磁质的差别。

*■ **反铁磁质的磁化行为较复杂**，仅举最简单的例子给以说明。一块氧化锰（**MnO**）单晶反铁磁质，取外磁场**平行**或**反平行于**锰离子固有磁矩方向。此时**温度越低**，磁化率越小；接近绝对零度时，磁化率几乎为零，这是交换作用强于外磁场作用的结果；

当**温度升高**，相应无规热运动增强，扰乱了反铁磁质的磁序，有利于外磁场的磁化作用，以至磁化率升高。

温度达到某一特定温度（**奈尔点**）时，反铁磁质的磁序消失，转变成顺磁质，此时磁化率达到一个极大值。温度再升高，与顺磁质类似，磁化率将随温度增加而减小，遵守居里定律。

若外磁场与原来锰离子的磁矩方向**垂直**，在转变温度（奈尔点）以下，磁化率与温度无关，数值等于平行情况下的最大值。

三、安培环路定理的应用举例

均匀线性各向同性介质中的静磁场

[例6.5] 求一电流为I的无穷长直导线在磁导率为μ的无限、均匀线性各向同性磁介质中的磁场分布。

[解] 本问题显然具有轴对称性质，是一维问题，磁感应线为以长直导线为轴的圆，磁场强度的大小只与圆半径r有关。取以长直导线为轴、半径为r的圆回路，应用式（**6.3.5**）先求H，得：

$$2\pi rH = I, \qquad H = \frac{I}{2\pi r}.$$

再由式（**6.4.2**）可得B：$B = \mu H = \mu I/(2\pi r)$，它为真空中无穷长载流直导线的磁感应强度的$\mu/\mu_0$倍。

[例6.6] 设匝数为N、电流为I、平均半径为R的细螺绕环内填满磁导率为μ的均匀线性各向同性磁介质，求管内磁感应强度的大小。

[解] 取管内与环同轴的半径为R的圆回路，应用安培环路定理（6.3.5）先求$\boldsymbol{H}$，得:

$$2\pi RH = NI, \qquad H = \frac{NI}{2\pi R} = nI,$$

式中n为单位长度上的匝数。再由式(6.4.2)式可求$\boldsymbol{B}$，得$B = \mu H = \mu nI$，它为真空螺绕环$\boldsymbol{B}$值的μ / μ_0倍。

■ 简单提一下$\boldsymbol{H}$线的概念和基本性质：

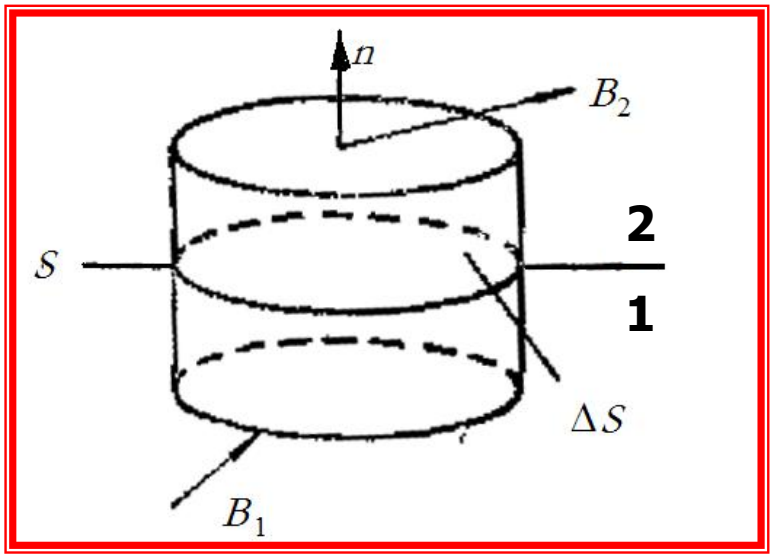
所谓$\boldsymbol{H}$线，是指磁场空间的一组曲线，沿曲线每点的切线与该点的磁场强度$\boldsymbol{H}$平行。类比磁感应线数密度的概念，我们可以定义$\boldsymbol{H}$线的数密度，它在数值上等于$\boldsymbol{H}$的大小。由$\boldsymbol{H}$满足的环路定理（6.3.5），可推断$\boldsymbol{H}$线和传导电流线总是相互环绕。对各向同性磁介质而言，$\boldsymbol{H}$与$\boldsymbol{B}$处处平行。

§6.5 边值关系和唯一性定理

一、磁场在磁介质界面上的边值关系

■在实际问题中会碰到磁介质界面的情况，在这种界面两侧磁场将有确定关系，从静磁场的高斯定理和安培环路定理可以推出，称为磁场在磁介质界面上的边值关系（类似静电场）。

■设有两种介质，分界面为S。在S上取面元ΔS，n为它的单位法线矢量，由介质1指向介质2。



以ΔS为截面作一柱形高斯面，其两底分别位于介质1和2中（如右图）。柱面的高度很小且最终趋于零，故在计算通过该高斯面的磁通量时只需考虑两底面的贡献。对该高斯面运用高斯定理(6.3.2)得：

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0. \qquad (6.5.1)$$

式（6.5.1）表明B的法向分量在界面上连续。

■对于6.2节讨论的介质2为真空的情况，由公式:

$$\oint_L \boldsymbol{M} \bullet d\boldsymbol{L} = \sum_{\text{穿L}} I' \qquad (6.2.5)$$

前面推得：

$$\boldsymbol{i}' = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{n}, \qquad (6.2.6)$$

■若介质2不是真空，取 $M_2 \neq 0$，用 M_1 代$\boldsymbol{M}$，则式（6.2.6）应代之以：

$$\boldsymbol{i}' = \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{M}_2 - \boldsymbol{M}_1). \qquad (6.5.2)$$

上式常用来计算介质界面的磁化面电流密度。

■ 由安培环路定律：$\oint_L \boldsymbol{H} \bullet d\boldsymbol{L} = \sum_{\text{穿L}} I_0$ (6.3.5)

与式（6.2.5）形式上类似，由它出发可推得：

$$\boldsymbol{i}_0 = \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1), \qquad (6.5.3)$$

式中 i_0 为界面传导面电流密度。对通常磁介质界面常有 $i_0 = 0$，以至

$$n \times (H_2 - H_1) = 0. \qquad (6.5.4)$$

二、静磁场的唯一性定理

静磁场必须满足高斯定理（6.3.2）和安培环路定理（6.3.5），B和H的关系由介质的性能方程决定。

对均匀线性各向同性磁介质，B和H满足线性关系（6.4.2）。

从这些方程出发，**辅之以适当的附加条件**，就可以唯一确定静磁场，这就是静磁场的唯一性定理。

■ 静磁场的唯一性定理的一般表述和证明涉及数学较多，已超出本书的范围。下面我们只就一种最简单的情况来阐述和证明静磁场的唯一性定理。

■ 我们设假磁场空间为一封闭曲面 S 所包围。如果 S 有限，则给定 S 面上的法向磁感应强度 B_{Sn} ，它应满足条件：

$$\oiint_S B_{Sn}\,dS = 0,$$ 即满足高斯定理。

如果 S 无限，则要求 $\boldsymbol{B}_S \to 0$ 。

其次，设磁介质线性各向同性，磁导率已知，但允许出现非均匀性，以及在不同磁介质界面处出现间断。

最后，设导体中传导电流的分布已知。在这种情况下，静磁场将被唯一确定，这就是静磁场的唯一性定理。

*■下面用反证法来证明唯一性定理：

设对给定的传导电流分布、磁导率分布和S面上的边界条件的静磁场解不唯一，不妨设有两个解，其磁感应强度和磁场强度分别为 $\boldsymbol{B}_1$ 、$\boldsymbol{H}_1$ 和 $\boldsymbol{B}_2$、$\boldsymbol{H}_2$。令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2$，$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2$，则由环路定理与高斯定理，**B和H对应传导电流为零**、S 面上 $B_{Sn}=0$ 或 $\boldsymbol{B}_S\to 0$。

*■对于S面有限即 $B_{Sn}=0$ 的情况，磁感应线或**H线只有切向分量**，不可能起止于S面上，而只能在S内闭合。由上节末尾的结论，可推断S内必有传导电流，而这与B对应零传导电流的前提发生矛盾。于是，结论只能是**S内处处有 B = 0**，即 $\mathbf{B}_1=\mathbf{B}_2$，唯一性定理得证。

*■对于S面无限即 $B_S \to 0$ 的情况，磁感应线（或H线）或在有限空间内闭合，或起止于无穷远处。前者不可能发生，理由同上。后者可用该H线和无穷远共同组成一闭合回路，沿该回路H的环流不等于零，同样导致有传导电流从中穿过的结论，与前提发生矛盾。因此，只可能$B=0$，$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$，即唯一性定理成立。

■以下提到静磁场的唯一性定理时，我们暗中假定上述有关附加条件满足，从而将唯一性定理简单地说成是满足同样的高斯定理和安培环路定理的任何两个静磁场必定相等。

三、分区均匀线性各向同性介质中的静磁场

在许多情况下，介质被设为分区均匀和线性各向同性。下面我们分析常见的两种特例。(与静电场对比理解)

(1) 介质界面与磁感应线重合（界面两边B、H只有切向）

在这种情况下，可猜测并根据静磁场的唯一性定理证明。由**介质两边的H应相等**，猜

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}_0 / \mu_0 \qquad (6.5.5)$$

式中 H 为待求静磁场的磁场强度，B_0 为传导电流（在真空中）产生的磁感应强度。只要已知传导电流的分布，即可算得 B_0 。特别对传导电流对称分布的情况，可运用如下安培环路定理

$$\oint_L \boldsymbol{B}_0 \cdot d\boldsymbol{L} = \mu_0 \Sigma I_0 \qquad (6.5.6)$$

先计算 B_0，便得H，然后计算各区的B_i：

$$B_i = \mu_i H = \mu_i B_0 / \mu_0 \qquad (6.5.7)$$

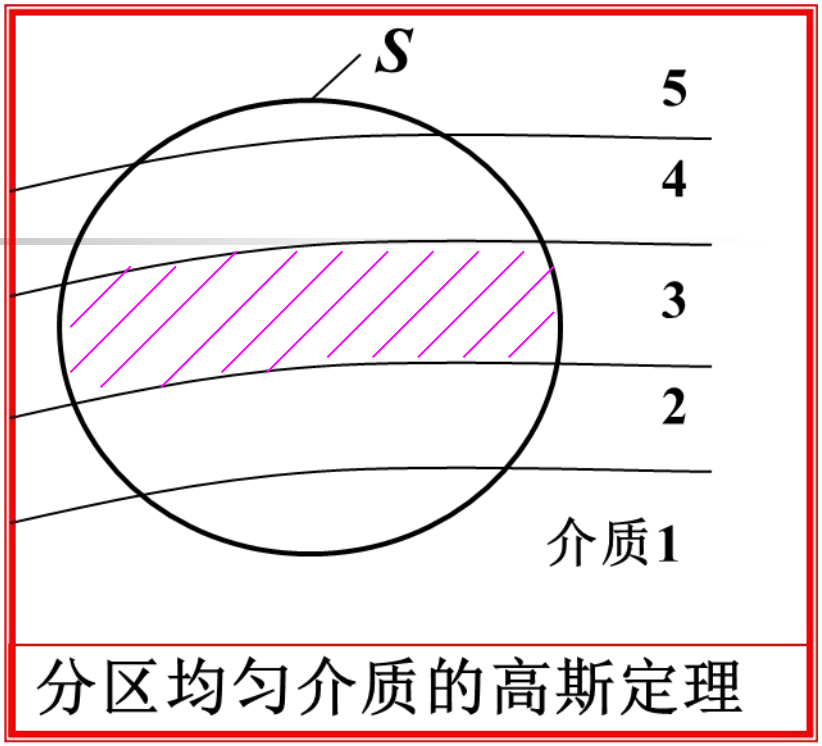
■下面证明式（6.5.5）成立。根据静磁场的唯一性定理，只需证明和满足同样的高斯定理和环路定理就够了。将式(6.5.6)左右两边同除以μ_0，再与式（6.3.5）比较，可知H和 $\mathbf{B}_0/\mu_0$ 满足同样的环路定理。若能证明

$$\oiint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = 0 \qquad (6.5.8)$$

则 H和 B_0/μ_0 满足同样的高斯定理。

在一般情况下式（6.5.8）不成立，因而式（6.5.5）也不成立。

但在目前情况下，由于界面与磁感应线重合，可证式（6.5.8）成立。下面分两种情况做出证明：



分区均匀介质的高斯定理

■首先，若S完全位于第 *i* 区介质中，则有：

$$\oiint_S \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{1}{\mu_i}\oiint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=0$$

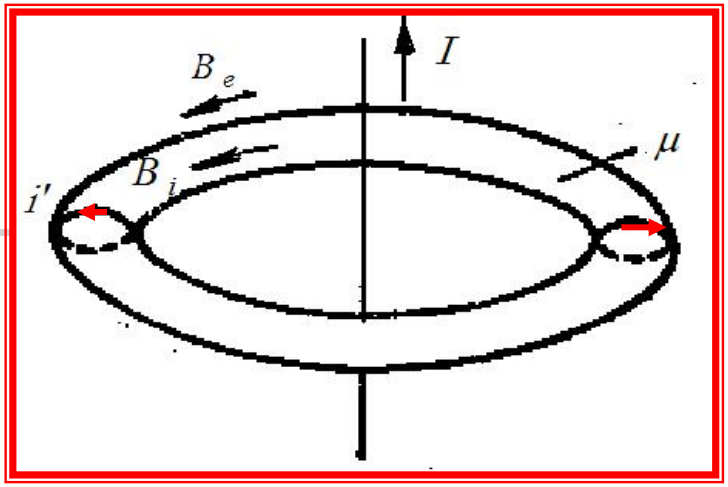
0

即式（6.5.8）成立。

- **其次**，S若跨越若干个介质区，则将被它所跨越的界面划分为若干部分，其中任一部分的侧面加上与之邻接的界面一道组成一个闭合子高斯面（前页图中斜线区）。于是，**每个子高斯面均处于同一介质之中**，由前页所证，**其H通量为零**。记住子高斯面是上、下界面加侧面。

对各向同性介质，$H//B$，所以H线也与界面重合。这样，组成子高斯面的**界面部分对于通量没有贡献**，则侧面的H通量也应为零（由前一页的结论）。**侧面之和**为S，所以通过S的H通量必为零，即式（**6.5.8**）成立。

[例6.7] 一圆环状磁介质与一无穷长直导线共轴（右图）。设磁介质磁导率为μ，直导线电流强度为*I*，求介质内外空间的磁感应强度的分布和介质表面的磁化面电流。



直线电流和磁介质圆环

[解] 本例题属于介质界面与磁感应线重合的情况。无穷长直线电流在真空中产生的磁感应强度与以该直线为轴的圆形环路相切，大小为：

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad H = \frac{I}{2\pi r}$$

式中**r**为离直导线的距离。由式（**6.5.7**）可求得介质内、外空间的磁感应强度和的大小为：

$$B_i = \frac{\mu I}{2\pi r}, \qquad B_e = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

由式（**6.5.2**）可求得界面上磁化电流的密度为:

$$i' = M_i - M_e = \frac{1}{\mu_0}(B_i - B_e) = \frac{(\mu - \mu_0)I}{2\pi\mu_0 r}$$

方向示于前页图。在推导上式过程中用到式（**6.3.4**）和式（**6.5.4**），后者即***H***切向分量在界面上连续。

■注意:

本题具有轴对称性，也可以直接由环路定理先算**H**，不必先算$\mathbf{B}_0$再算**H**。

然而，对于非对称情形，在某磁通量管中填入磁介质之后，则只能按本小节介绍的方法求解。

(2) 介质界面与磁感应线垂直

首先分析，然后猜测，再证明。

■ 由于介质界面与磁感应线垂直，**界面两边的B应相等**。**M**也应与界面垂直，由式（**6.5.2**）可知，界面上不会出现磁化面电流。**唯一**可能出现磁化面电流的地方为介质和载流导体的界面。

■ 同一载流导体可能与多种磁介质毗连，不同毗连面上的磁化面电流各异。

■ **假定载流导体为超导体**或内部磁场恒为零的**理想导体**。则根据磁场环路定理，传导电流只分布于导体表面，且其分布会自动调整，最终恰好补偿磁化面电流的变化，维持**总电流的分布形式不变**，以实现**理想导体**内磁场恒等于零的条件。当然，这一调整过程可能会改变总电流（传导电流和磁化电流之和）强度。

■因此，我们的结论是：**介质的引入不会改变磁感应强度的分布形式**，改变的仅仅是它的大小。在这种情况下，令(猜)待求磁感应强度 $\boldsymbol{B}=\alpha\boldsymbol{B}_0$，$\alpha$ 是个待定常数，于是$\boldsymbol{B}$和 $\alpha\boldsymbol{B}_0$自然满足高斯通量定理。随之我们可以去掉介质，按真空情况处理，**先算得磁场** B_0；**然后**可直接由安培环路定理确定 α，由此可知$\boldsymbol{B}$和 $\alpha\boldsymbol{B}_0$ 将自然满足安培环路定理：

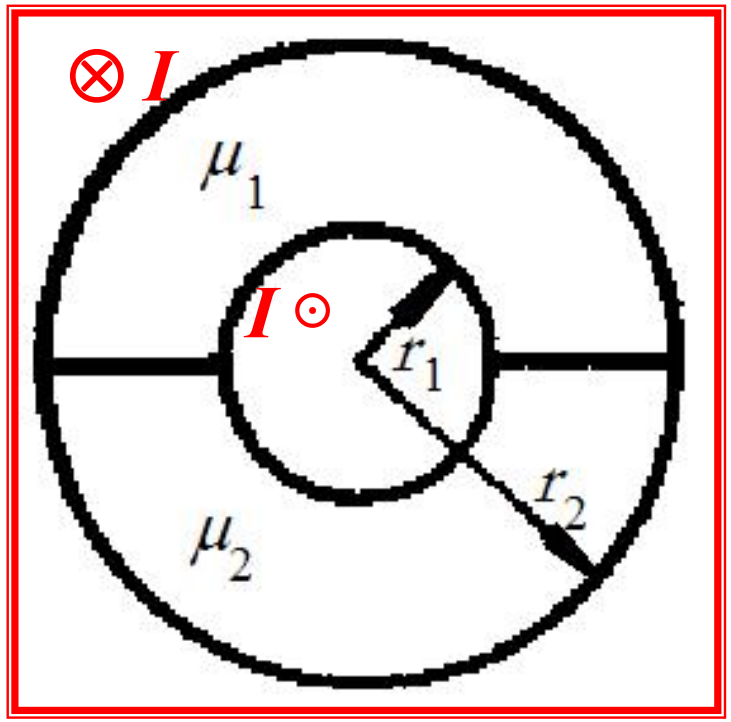
$$\oint_L \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=\oint_L \frac{\mathbf{B}}{\mu}\cdot d\mathbf{l}=\alpha\oint_L \frac{\mathbf{B}_0}{\mu}\cdot d\mathbf{l}=\Sigma I_0,\qquad \therefore\quad \alpha=\frac{\Sigma I_0}{\oint_L \frac{\mathbf{B}_0}{\mu}\cdot d\mathbf{l}} \tag{6.5.9}$$

式中L为围绕给定传导电流的任意闭合回路，磁导率 μ 在不同介质区取给定常数。随即得$\boldsymbol{B}=\alpha\boldsymbol{B}_0$。**最后**由：

$$\boldsymbol{H}_i=\frac{1}{\mu_i}\boldsymbol{B} \tag{6.5.10}$$

可求得各介质区的磁场强度。

[例6.8]在一同轴电缆（内导体半径为 r_1，外导体的内半径为 r_2，两导体可认为理想导体）中填满磁导率为 μ_1 和 μ_2 两种磁介质，各占一半空间，且介质界面为通过电缆轴的平面（**下图**）。设通过电缆的电流强度为I，求介质中的磁场分布和介质—导体毗连面上的面电流分布。



[解] 本题属于**磁介质界面与磁感应线垂直**的情况。且介质置入前的磁感应强度相对电缆轴线对称。可猜**B**具有对称性。

取半径为r ($r_1 < r < r_2$) 的圆回路，由（**6.5.9**）第一式得：

$$\frac{B}{\mu_1}\pi r + \frac{B}{\mu_2}\pi r = I$$

于是直接得:

$$B=\frac{\mu_1\mu_2 I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r}$$

再由式（**6.5.10**）求得介质**1**和介质**2**中的磁场强度为:

$$H_1=\frac{B}{\mu_1}=\frac{\mu_2 I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r},\qquad H_2=\frac{B}{\mu_2}=\frac{\mu_1 I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r}$$

相应磁化强度为:

$$M_1=\frac{1}{\mu_0}B-H_1=\frac{\mu_2[(\mu_1/\mu_0)-1]I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r}$$

$$M_2=\frac{1}{\mu_0}B-H_2=\frac{\mu_1[(\mu_2/\mu_0)-1]I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r}$$

对于 $r<r_1$ 和 $r>r_2$，理想导体内恒有 $\boldsymbol{B=H=M=0}$。在 $r=r_1$ 处的磁化面电流和传导面电流密度为:

$$i_1'=\begin{cases} M_1\big|_{r=r_1}=\dfrac{\mu_2[(\mu_1/\mu_0)-1]I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r_1}, & \text{(介质1)}, \\ M_2\big|_{r=r_1}=\dfrac{\mu_1[(\mu_2/\mu_0)-1]I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r_1}, & \text{(介质2)}, \end{cases}$$

$$i_{01}=\begin{cases} H_1\big|_{r=r_1}=\dfrac{\mu_2 I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r_1}, & \text{(毗连介质 1)}, \\ H_2\big|_{r=r_1}=\dfrac{\mu_1 I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r_1}, & \text{(毗连介质 2)}, \end{cases}$$

与此类似，在 $r = r_2$ 处有：

$$i'_2 = \begin{cases} -M_1|_{r=r_2} = -\dfrac{\mu_2[(\mu_1/\mu_0)-1]I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r_2}, & \text{(介质1)}, \\ -M_2|_{r=r_2} = -\dfrac{\mu_1[(\mu_2/\mu_0)-1]I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r_2}, & \text{(介质2)}, \end{cases}$$

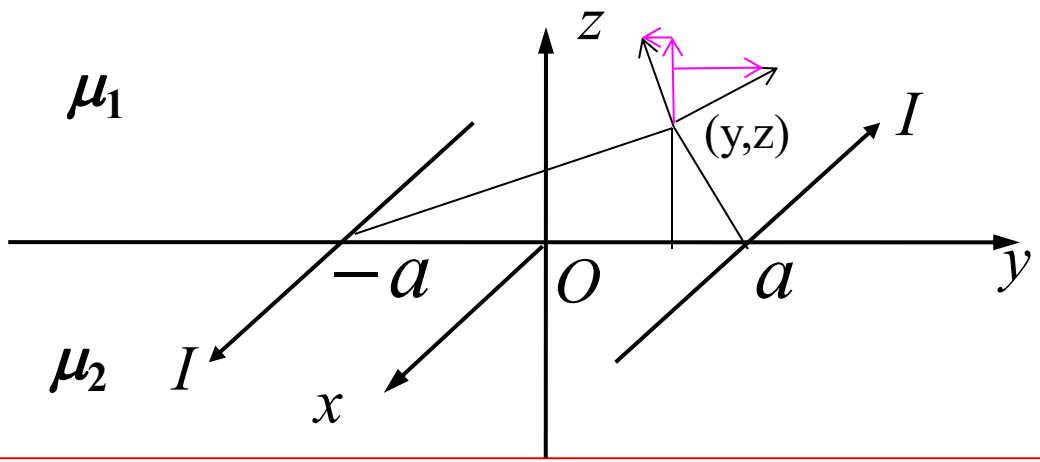
$$i_{02} = \begin{cases} -H_1|_{r=r_2} = -\dfrac{\mu_2 I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r_2}, & \text{(毗连介质1)}, \\ -H_2|_{r=r_2} = -\dfrac{\mu_1 I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r_2}, & \text{(毗连介质2)}, \end{cases}$$

讨论：■由上述结果可见，在 $r = r_1$ 和 $r = r_2$ 处的磁化面电流和传导面电流密度分布都不均匀，但总面电流 $i = i' + i_0$ 的分布却是均匀的。

■ 正是总面电流分布的这种对称性决定了磁感应强度B的对称性。可是，介质的引入破坏了磁场强度H的轴对称性，因此无法直接通过安培环路定理计算。

■ 顺便指出，本题假定电缆线为内部磁场为零的超导体或理想导体，否则问题将变得十分复杂，不能用上述简单方法求解。

[例6.9] 如下图所示，一无限平面（$z=0$）将磁导率分别为μ_1和μ_2的介质隔开，在 y 轴上$y=\pm a$的位置分别放置电流强度为I的无限长直线电流，电流方向分别沿 x 的负向和正向，求空间磁场分布。



两条长直线电流在两半无限介质中的磁场

[解] 当去掉介质，平面恰好与两线电流的磁场垂直。因此，本题属于介质界面与磁感应线垂直的情况。

■ 因此，先去掉介质，由5.2节例5.1的结果，求得两线电流的磁感应强度$\boldsymbol{B}_0$的空间分布如下：

$$B_{0y}=\frac{\mu_0 Iz}{2\pi}\left\{\frac{1}{(y-a)^2+z^2}-\frac{1}{(y+a)^2+z^2}\right\}$$

$$B_{0z}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left\{-\frac{y-a}{(y-a)^2+z^2}+\frac{y+a}{(y+a)^2+z^2}\right\}$$

则待求磁感应强度为 $\boldsymbol{B}=\alpha\boldsymbol{B}_0$，$\alpha$ 为待定乘子。

■ 为确定 α 在*y*-*z*平面取闭合圆回路*L*，环绕、并以位于 $y=a$ 处的直线电流为轴。由式（6.5.9）第二式，可确定乘子：

$$\alpha=\frac{\sum I_0}{\int_L \frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu}\bullet d\boldsymbol{L}}=\frac{I}{\mu_1^{-1}\int_{L_1}\boldsymbol{B}_0\bullet d\boldsymbol{L}+\mu_2^{-1}\int_{L_2}\boldsymbol{B}_0\bullet d\boldsymbol{L}}$$

$$=\frac{2I}{\left(\mu_1^{-1}+\mu_2^{-1}\right)\int_L \boldsymbol{B}_0\bullet d\boldsymbol{L}}=\frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_0\left(\mu_1+\mu_2\right)}$$（计算过程见下页）

式中 L_1 和 L_2 为回路L位于介质1和2中的部分，成立:

$$\int_{L_1} \boldsymbol{B}_0 \cdot d\boldsymbol{l} = \int_{L_2} \boldsymbol{B}_0 \cdot d\boldsymbol{l} = \frac{1}{2}\oint_{L} \boldsymbol{B}_0 \cdot d\boldsymbol{l} = \frac{1}{2}\mu_0 I$$

最终结果如下：

$$B_y = \alpha B_{0y} = \frac{\mu_1\mu_2 Iz}{\pi(\mu_1+\mu_2)}\left\{\frac{1}{(y-a)^2+z^2} - \frac{1}{(y+a)^2+z^2}\right\}$$

$$B_z = \alpha B_{0z} = \frac{\mu_1\mu_2 I}{\pi(\mu_1+\mu_2)}\left\{\frac{y+a}{(y+a)^2+z^2} - \frac{y-a}{(y-a)^2+z^2}\right\}$$

如果需要进一步计算各介质区的磁场强度，可使用式（**6.5.10**）。

*§6.6 磁像法

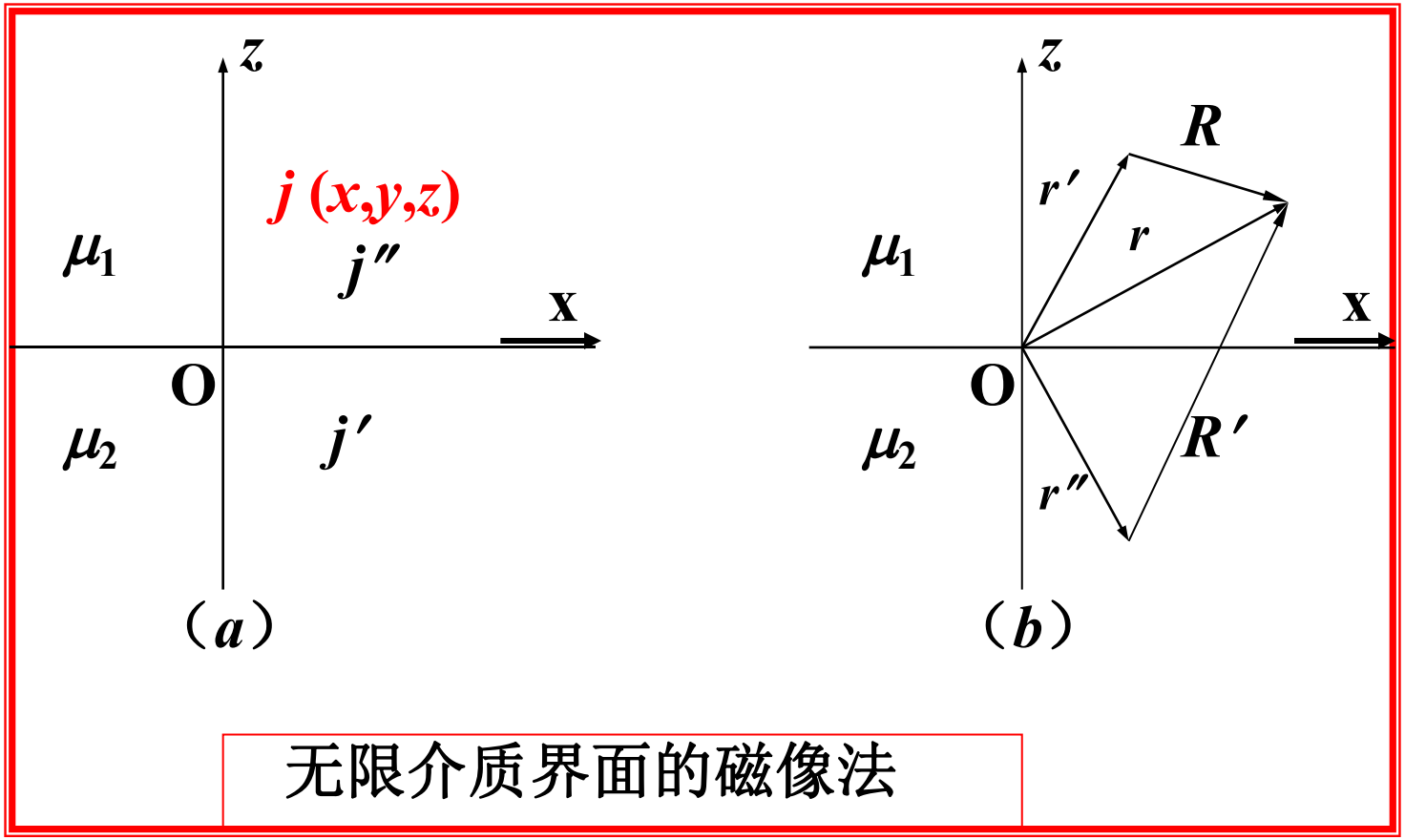
■ 对某些**具有特殊几何形状**的**均匀线性各向同性介质界面**的静磁场问题，可运用“磁像法”求解。磁像法的根据在于静磁场的唯一性定理。

■若从**磁荷观点**出发，**磁像法**和**电像法**（见第二章**2.8**节）步骤相同，结果可按**6.8**节的表**6.2**去一一对应。

■本节将从**电流观点**出发。这时，**磁像法的实质是**：设法找到一虚拟的电流（即**像电流**）来代替介质界面上的磁化电流（或导体界面上的感应电流）对考察区域磁场的贡献。像电流一旦求得，静磁场问题就迎刃而解。下面我们介绍用磁像法求解静磁场问题的两种特例。

一、介质界面为无限平面

设$z=0$为介质界面。界面上方($z>0$)为介质1，磁导率为μ_1；界面下方($z<0$)为介质2，磁导率为μ_2（下图(a)）。



无限介质界面的磁像法

在介质1中（注意例2.11，q在介质2中），设有一电流分布：

$$\boldsymbol{j}(x,y,z)=j_x(x,y,z)\hat{x}+j_y(x,y,z)\hat{y}+j_z(x,y,z)\hat{z}, \qquad \textbf{(6.6.1)}$$

则对上半空间（$z>0$），参照电像法的公式，可相应写出像电流为：

$$\left.\begin{aligned}
j'_x(x,y,-z)&=\frac{(\mu_2-\mu_1)\mu_1}{(\mu_1+\mu_2)\mu_0}j_x(x,y,z),\\
j'_y(x,y,-z)&=\frac{(\mu_2-\mu_1)\mu_1}{(\mu_1+\mu_2)\mu_0}j_y(x,y,z),\\
j'_z(x,y,-z)&=-\frac{(\mu_2-\mu_1)\mu_1}{(\mu_1+\mu_2)\mu_0}j_z(x,y,z).
\end{aligned}\right\}$$

注意！其中：

$$\mu_1\to\frac{1}{\varepsilon_2}$$

(6.6.2)

对下半空间（$z<0$），像电流为：

$$j''_x(x,y,z)=j'_x(x,y,-z),\quad j''_y(x,y,z)=j'_y(x,y,-z),$$
$$j''_z(x,y,z)=-j'_z(x,y,-z). \qquad \textbf{(6.6.3)}$$

上半空间的磁场为：（见前页图**(b)**，$\boldsymbol{r}'(x',y',z')$为源点）

$$\boldsymbol{B}(z>0)=\frac{\mu_1}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{j}(x',y',z')\times\boldsymbol{R}}{R^3}dx'dy'dz'$$

$$+\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{j}'(x',y',-z')\times\boldsymbol{R}'}{(R')^3}dx'dy'dz', \qquad \textbf{(6.6.4)}$$

下半空间的磁场为：

$$\boldsymbol{B}(z<0)=\frac{1}{4\pi}\iiint\left[\mu_1\boldsymbol{j}(x',y',z')+\mu_0\boldsymbol{j}''(x',y',z')\right]\times\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}dx'dy'dz'$$

(6.6.5)

式中体积分对源点进行，$\boldsymbol{R}$和$\boldsymbol{R}'$的表达式如下（见前页图**(b)**）：

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',R=[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}, \qquad \textbf{(6.6.6)}$$

$$\boldsymbol{R}'=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'',R'=[(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2]^{1/2}. \qquad \textbf{(6.6.7)}$$

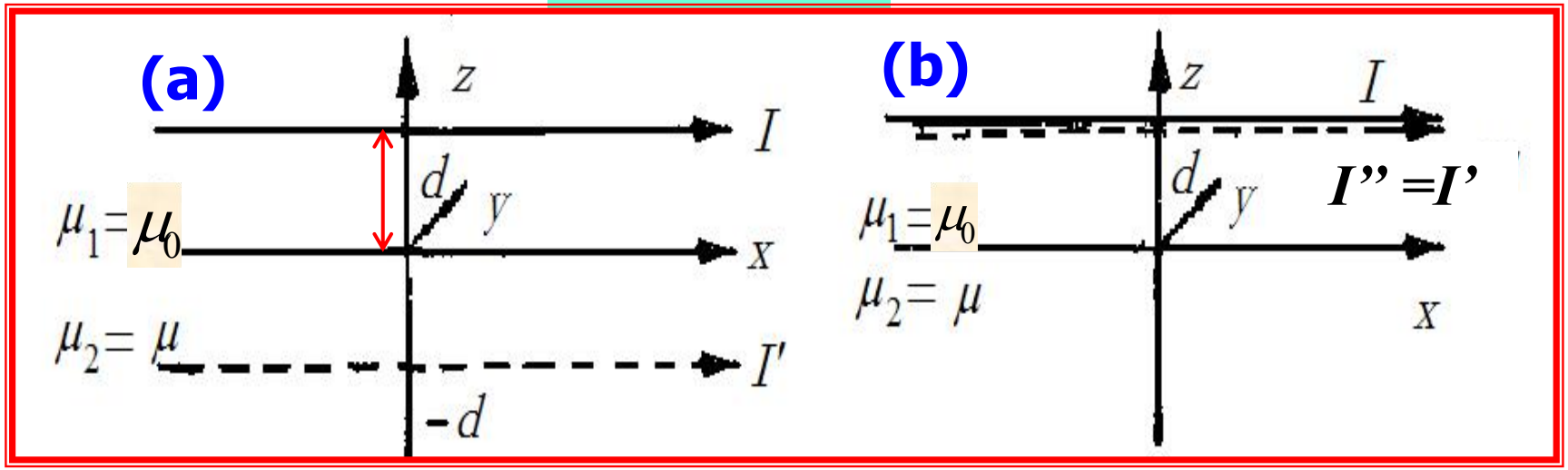
这里$\boldsymbol{r}(x,y,z)$为**场点**，$\boldsymbol{r}''(x',y',-z')$为**像点**。

[例6.10] 设下半空间($z<0$)充满磁导率为μ的磁介质，上半空间($z>0$)为真空，其中置入一无穷长直线电流I，它与界面平行，距离为d。求空间的磁场分布。

[解] 由式**(6.6.2)**，取 $\mu_1=\mu_0$，$\mu_2=\mu$，则**对上半空间**而言，**像电流**位于 $z=-d$，方向与 I 相同（见下图**(a)**），大小为:

$$I'=\frac{\mu-\mu_0}{\mu+\mu_0}I$$

只有x分量！



对下半空间而言，**像电流** I'' 可由式（**6.6.3**）求得，其位置与I重合，大小也为 I'（见上图**(b)**）

◆ 可求**上半空间的磁场**，由式（**6.6.4**），利用第五章**5.2**节例**5.1**关于无穷长直线电流磁场的计算结果：

$$B_{y1}=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left\{\frac{z-d}{y^2+(z-d)^2}+\frac{(\mu-\mu_0)(z+d)}{(\mu+\mu_0)[y^2+(z+d)^2]}\right\}$$

$$B_{z1}=\frac{\mu_0 I y}{2\pi}\left\{\frac{1}{y^2+(z-d)^2}+\frac{\mu-\mu_0}{(\mu+\mu_0)[y^2+(z+d)^2]}\right\}$$

特别**在界面上（$z=+0$）有**：

$$B_{y1}=\frac{\mu_0^2 I d}{\pi(\mu+\mu_0)(y^2+d^2)},\qquad B_{z1}=\frac{\mu\mu_0 I y}{\pi(\mu+\mu_0)(y^2+d^2)}$$

◆ 可求得**下半空间的磁场**，由式（**6.6.5**），利用无穷长直线电流磁场的计算结果：

$$B_{y2} = -\frac{\mu\mu_0 I(z-d)}{\pi(\mu+\mu_0)[y^2+(z-d)^2]}$$

$$B_{z2} = \frac{\mu\mu_0 Iy}{\pi(\mu+\mu_0)[y^2+(z-d)^2]}$$

在界面上($z=-0$)有：

$$B_{y2} = \frac{\mu\mu_0 Id}{\pi(\mu+\mu_0)(y^2+d^2)} = \frac{\mu}{\mu_0}B_{y1}$$

$$B_{z2} = \frac{\mu\mu_0 Iy}{\pi(\mu+\mu_0)(y^2+d^2)} = B_{z1}$$

上式表明，由磁像法所得之解满足$z=0$两侧 B_z 连续、H_y 连续($H_{y2}=B_{y2}/\mu=H_{y1}=B_{y1}/\mu_0$) 的边值关系。

■ 另外，下面给出式（6.6.2）的两种特例:

◆ 第一种特例取 $\mu_1=\mu$， $\mu_2=0$，即介质2为理想抗磁介质。这时式（6.6.2）化为:

$$\left.\begin{aligned} j'_x(x,y,-z) &= -(\mu/\mu_0)j_x(x,y,z),\\ j'_y(x,y,-z) &= -(\mu/\mu_0)j_y(x,y,z),\\ j'_z(x,y,-z) &= (\mu/\mu_0)j_z(x,y,z). \end{aligned}\right\} \quad (6.6.8)$$

而按式（6.6.3）算出j''之后代入式（6.6.5）式，可知$B(z<0)=0$，即介质2中磁感应强度为零。超导体是理想的抗磁质。对理想导体(电导率趋于无穷)而言，导体中的磁场取决于初始条件。

◆ 第二种特例取 $\mu_1=\mu$ ，$\mu_2=\infty$ 即介质2为理想导磁介质。这时有:

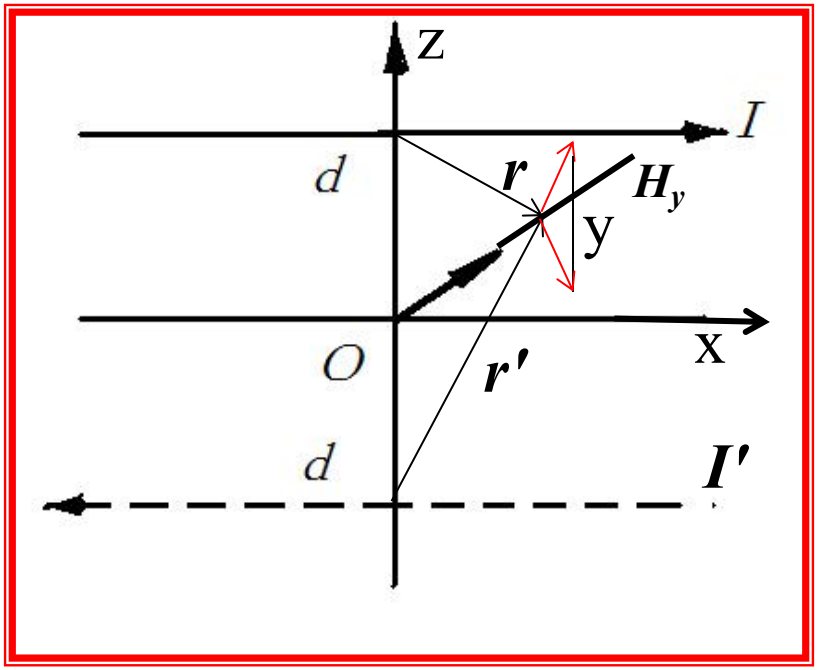
$$\left.\begin{aligned} j'_x(x,y,-z) &= (\mu/\mu_0)j_x(x,y,z),\\ j'_y(x,y,-z) &= (\mu/\mu_0)j_y(x,y,z),\\ j'_z(x,y,-z) &= -(\mu/\mu_0)j_z(x,y,z). \end{aligned}\right\} \quad (6.6.9)$$

铁磁质一般磁导率远大于 μ_0，可近似当作理想导磁质处理。

[例6.11]一无限理想导体平面上方为真空，其中有一无穷长直线电流I与界面平行，距离为d。求理想导体表面上的感应电流。

[解] 把理想导体当作理想的抗磁质，则由式（**6.6.8**），像电流I'位于 $z=-d$ ，方向与I反平行，大小等于I（下图）。于是，界面真空侧 $(z=+0)$ 的磁场强度为 $H_x=H_z=0$，

$$H_y=\frac{Id}{2\pi r^2}+\frac{Id}{2\pi r^2}=\frac{Id}{\pi(y^2+d^2)}.$$

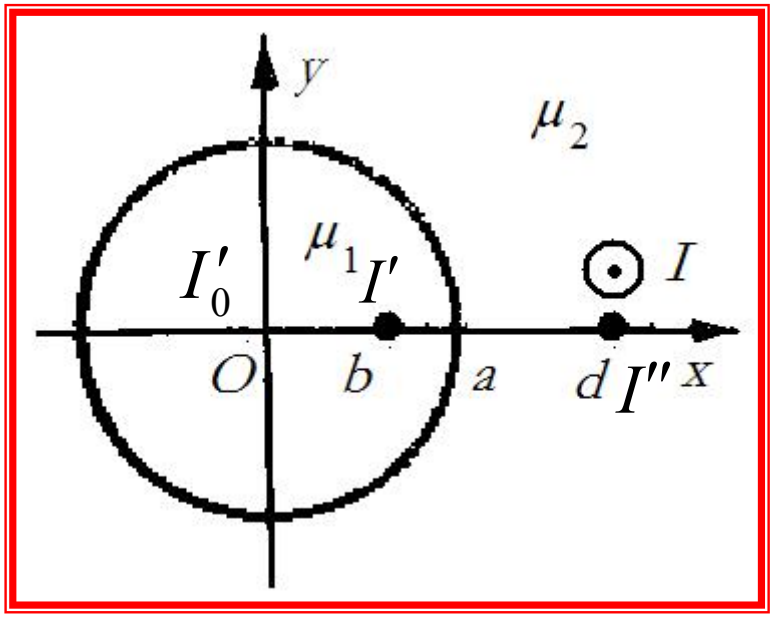


由式（**6.5.3**）可求得导体表面上的感应面电流密度为:

$$i_x=-H_y=-\frac{Id}{\pi(y^2+d^2)}.$$

二、介质界面为无穷长圆柱面

如右下图所示，取直角坐标*Oxyz*，使*z*轴与圆柱轴重合。设柱面半径为*a*，柱面内填满介质1，磁导率为 μ_1；柱面外填满介质2，磁导率为 μ_2。又设介质2中有一无穷长直线电流*I*与*z*轴平行，位于*x*轴上并与原点*O*相距*d*。可以证明，对介质2所在空间的磁场，像电流为*I'*和 I_0'，分别位于*x*=*b*和原点，参考式(6.6.2)及例2.13，猜测有:（*I* 在介质2中！）



$$I' = \frac{\mu_2(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_0(\mu_1 + \mu_2)} I \qquad (6.6.10)$$

$$I_0' = -I', \qquad (6.6.11)$$

$$b = a^2 / d. \qquad (6.6.12)$$

而对介质1所在的空间磁场而言，像电流为*I"*，位于源电流位置 $(x = d)$，且 $I'' = I'.$ (6.6.13)

■ 式（6.6.10）－（6.6.13）的证明步骤如下：

首先由源电流I及像电流I'、I_0'求得介质2中的磁感应强度；

进一步，由源电流I和像电流I''求得介质1中的磁感应强度；

再由磁感应强度法向分量在$r=a$处连续的条件，可证式（6.6.12）和式（6.6.13）成立；

最后，由磁场切向分量在$r=a$处连续的条件，可证式（6.6.10）和式（6.6.11）成立。上述证明过程请读者参看教课书p171。

◆对介质1为理想抗磁质的情况，有$\mu_1=0$，式（6.6.10）化为：

$$I'=-(\mu_2/\mu_0)I \qquad (6.6.14)$$

◆当介质1为理想导磁质时$\mu_1\to\infty$，有：

$$I'=(\mu_2/\mu_0)I \qquad (6.6.15)$$

§6.7 磁路定理及其应用

一、磁路定理的基本方程

■尽管不同性质的物理现象满足**不同的物理规律**，但常出现这些规律的**数学表述相同或相近**的情况，以至可以采用**同一种数学方法进行分析处理**。在＊§**4.5**中已经碰到。本节将要介绍的**磁路**和**磁路定理**和第四章提到的**电路**和**电路定律**又具有这种**对应的关系**。

■简单回顾一下**直流电路问题**的处理过程。我们用到以下基本方程（见第四章）：

1. 稳恒条件：
$$\iint \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S}=0 \qquad (6.7.1)$$

2. 欧姆定律：
$$\boldsymbol{j}=\sigma(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{K})=\sigma\boldsymbol{E}' \qquad (6.7.2)$$

3. 电动势的定义：
$$\oint \boldsymbol{K}\cdot d\boldsymbol{l}=\oint \boldsymbol{E}'\cdot d\boldsymbol{l}=\varepsilon \qquad (6.7.3)$$

■从上述基本方程出发，对闭合电流管即闭合电路可推导得：

(1) 沿电流管的电流强度$I=j\cdot S=$常量；

(2) 如下**电路方程**成立：

$$\mathcal{E}=IR, \qquad (6.7.4)$$

式中：

$$R=\int\frac{dl}{\sigma S} \qquad (6.7.5)$$

若电导率σ和截面积S沿电流管分段均匀，第i段落电流管的长度、截面积、电导率和电阻分别为l_i、S_i、σ_i和R_i，则R可表示为：

$$R=\sum_i R_i, \qquad R_i=\frac{l_i}{\sigma_i S_i}. \qquad (6.7.6)$$

■ 下面我们列出静磁场的有关方程：

1. 磁场的高斯定理：

$$\oiint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=0 \qquad \textbf{(6.7.7)}$$

2. 磁介质性能方程：

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H} \qquad \textbf{(6.7.8)}$$

3. 安培环路定理：

$$\int \boldsymbol{H}\bullet d\boldsymbol{l}=\Sigma I_0=\mathcal{E}_m \qquad \textbf{(6.7.9)}$$

称式 $\mathcal{E}_m=\Sigma I_0$ 为“**磁动势**”。

■只要将 $j \Leftrightarrow B$，$E' \Leftrightarrow H$，$\sigma \Leftrightarrow \mu$ ，$\mathcal{E} \Leftrightarrow \mathcal{E}_m$ ，则式（6.7.1）—式（6.7.3）和 式（6.7.7）—式（6.7.9）之间也一一对应。由这些对应关系，我们还可以推论出如下对应关系：

(a) 电导率为 σ 的**电流管**与磁导率为 μ 的**磁力线管**对应；

(b) 电流管的**电流强度** $I = jS$ 与磁力线管的**磁通量** $\Phi_B = BS$ 对应；

(c) 一闭合电流管的**电阻*R***与一闭合磁力线管的

$$R_m = \oint \frac{dl}{\mu S} \qquad \textbf{(6.7.10)}$$

对应，R_m 定义为“**磁阻**”。

设磁导率 μ 和截面积***S***沿磁力线管分段均匀，则有：

$$R_m = \sum_i R_{mi}, \qquad R_{mi} = \frac{l_i}{\mu_i S_i} \qquad \textbf{(6.7.11)}$$

像把电流管称为**电路**一样，我们把磁力线管称为“**磁路**”。对一闭合磁路而言，有与电路相对应的如下结论：

(1) 与$I=jS$对应，沿磁力线管的磁通量$\Phi_B = BS$=常量；

(2) 与电路定理$\varepsilon = IR$对应，如下“**磁路定理**”成立：

$$\mathcal{E}_m = \Phi_B R_m = \Phi_B \sum_i R_{mi} \qquad \textbf{(6.7.12)}$$

通常将 $\Phi_B R_{mi}$ 称为第i 段磁路的“磁势降”。

二、磁路定理的应用：有铁(磁)芯的问题

- **理想的电路**：它由电源、电阻和其它电路元件通过导线连接而成，电路外部为绝缘介质或真空（电导率 $\sigma = 0$），电流仅限于电路内部，即电流线严格与电路平行。
- **理想的磁路**：要实现它则不那么简单。一般实际的磁路由绕有线圈的闭合或带小气隙的环状铁芯组成。当线圈通以电流时，它所产生的磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 将使铁芯磁化，而磁化后的铁芯会产生附加磁场 $\boldsymbol{B}'$。我们将 $\boldsymbol{B}_0$ 称为外磁场，而将 $(\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}')$ 称为合磁场。
- 根据6.5节的分析，只有当铁芯磁导率均匀且填满合磁场的某个闭合的磁力线管时，合磁场的磁力线位形将同原外磁场完全一致，这样安排的闭合铁芯的确构成一个理想的磁路。密绕螺绕环（见第五章5.4节例5.8）就构成一理想磁路。

■ 可是实际的铁芯和线圈是根据使用需要设计的，铁芯的几何形状往往不能做到与线圈的合磁场的磁力线管一致。

另外，有的铁芯回路（例如日光灯镇流器铁芯）还留有气隙。在这种情况下，实际铁芯回路和合磁场的磁力线管之间必然会出现偏离，不能看作是理想的磁路。

■ 不过，如果偏离不远的话，还是可以把实际的铁芯回路近似看成理想磁路，从而运用前述磁路定理进行处理。

■**铁芯回路接近理想磁路的条件是：铁芯的磁导率 μ 远远大于 μ_0 。**这结论可以根据磁介质的**边值关系**作出进一步说明。如下图**(a)**所示，一界面把磁导率为 μ 的铁芯与磁导率近似为 μ_0 的空气隔开，磁力线在界面上发生“**折射**”。由**6.5**节给出的边值关系可知***B***的法向分量和***H***的切向分量跨过界面连续，即

$$B_1\cos\theta_1 = B_2\cos\theta_2, \qquad H_1\sin\theta_1 = H_2\sin\theta_2.$$

进一步由 $H_1 = B_1/\mu_0$ 和 $H_2 = B_2/\mu$，可将第二式改为：

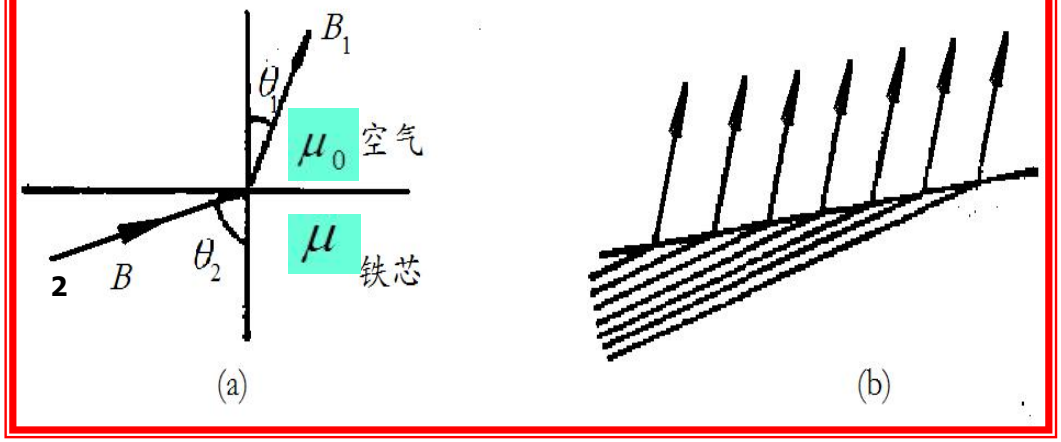
$$\mu B_1\sin\theta_1 = \mu_0 B_2\sin\theta_2$$

根据这些关系式可导出：

$$\tan\theta_2 = (\mu/\mu_0)\tan\theta_1,$$

$$B_2 = \left(\frac{1+(\mu/\mu_0)^2\tan^2\theta_1}{1+\tan^2\theta_1}\right)^{1/2} B_1.$$

由这两式可以推出以下结论：

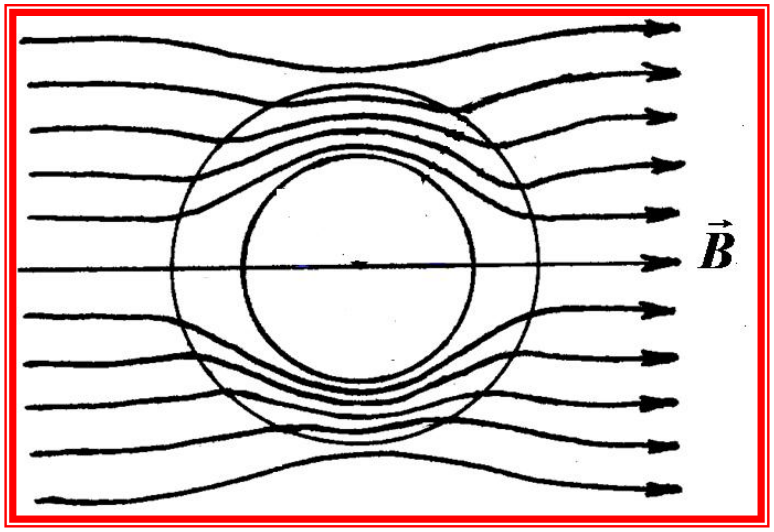


(a)磁感应线在铁芯界面上的折射；
(b)磁感应线集中于铁芯内部。

■**磁屏蔽**：当$\mu >> \mu_0$、$\theta_1 \neq 0$时，便近似有$\theta_2 \approx \pi/2$，$B_2 >> B_1$

因此**铁芯内磁感应线大体与界面平行**，且磁感应线将密集于铁芯内部（前页图**(b)**）。这说明，**大部分磁通量将集中在铁芯内部**，只有极小部分从铁芯表面泄漏出去，这近似理想磁路。利用这一性质，还可以达到**磁屏蔽**的目的。如下图**(c)**所示。**磁屏蔽也很重要。**

■ 一高磁导率的**软铁磁材料**（相对磁导率大于10^3）作成的空腔置于外磁场中，磁感应线将密集于软铁磁材料的腔壳之中，极少泄漏进空腔内。因此，空腔内的物体将几乎不受外磁场的影响，从而达到磁屏蔽的目的。



(c) 磁屏蔽原理

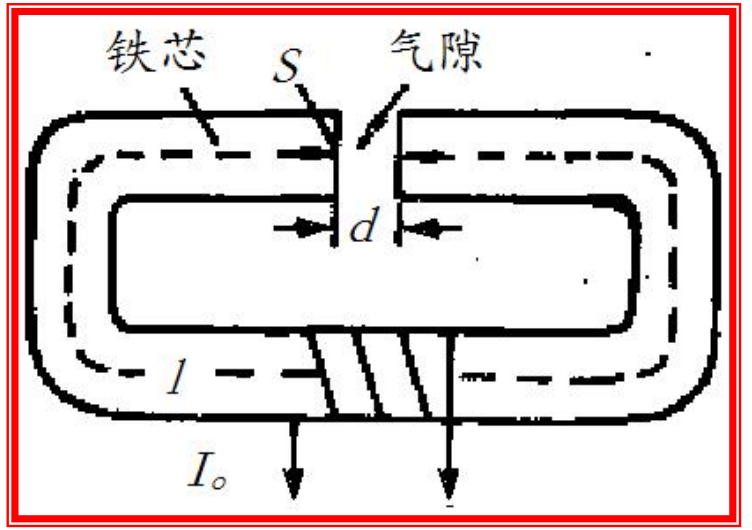
■考虑一带气隙的铁芯回路。设铁芯上的载流线圈提供磁动势 $\mathcal{E}_m = NI_0$，N为线圈匝数，I_0为电流强度(右下图)。进一步我们假定铁芯材料均匀，磁导率 $\mu >> \mu_0$，同时气隙很窄，以至可忽略漏磁效应，视整个回路为一理想磁路。在这一近似下，由磁路定理（**6.7.12**）得：

$$NI_0 = \Phi_B (R_{m1} + R_{m2}),$$

式中

$$R_{m1} = \frac{l}{\mu S}, \qquad R_{m2} = \frac{d}{\mu_0 S}$$

分别为铁芯和气隙的磁阻，l为铁芯磁路长度，d为气隙长度，S为铁芯截面面积（铁芯被假定为均匀截面）。



带气隙的磁路

[例6.12] 日光灯镇流器可以等效为一带气隙的矩形磁路。设铁芯磁导率为 μ，截面积为**S**，长度为**l**，线圈匝数为**N**，电流为 I_0，求无气隙时铁芯中的总磁通量以及该磁通量减至一半时的气隙长度**d**。

[解] 由磁路方程得（无气隙时）

$$NI_0 = \Phi_B \frac{l}{\mu S}, \qquad \Phi_B = BS = \mu SNI_0 / l$$

当存在气隙时，Φ_B 降至原值的一半，则下式成立：

$$NI_0 = \frac{\Phi_B}{2}\left(\frac{l}{\mu S} + \frac{d}{\mu_0 S}\right)$$

于是有：

$$\frac{l}{\mu S} = \frac{1}{2}\left(\frac{l}{\mu S} + \frac{d}{\mu_0 S}\right), \qquad d = \frac{\mu_0}{\mu} l$$

*§6.8 磁荷法

- 磁荷的概念最早是由库仑提出来的。由于迄今为止还未从实验上证实孤立磁荷的存在，故从物理上我们摒弃磁荷观点而坚持电流观点。
- 不过，作为静磁场的一种处理方法，磁荷法还是值得介绍的。本节将指出，对不存在传导电流的空间（包括真空和磁介质的单连通空间）的静磁场问题，磁荷法和电流法将给出完全相同的结果；而且在某些情况下，磁荷法比电流法简便。

一、 磁荷观点下的静磁场规律

(1) 真空中静磁场的高斯定理和环路定理

在第五章**5.1**节中，已经介绍了库仑等人引入的磁荷概念，给出了点磁荷的库仑定律及磁场强度的定义。从磁场强度的定义式和点磁荷的库仑定律出发，仿照静电场的推导方法，可证明真空中的静磁场满足如下高斯定理和环路定理，考虑到自由磁荷不存在：

$$\iint_S \boldsymbol{H} \bullet d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0} \sum_{(S内)} q_m = \frac{1}{\mu_0} \sum_{(S内)} q'_m \qquad (6.8.1)$$

$$\int_L \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = 0 \qquad (6.8.2)$$

特别由环路定理（**6.8.2**），我们可引入“磁势”的概念，它形式上与电势相对应。记磁势为 φ_m ，有：

$$\boldsymbol{H} = -\nabla \varphi_m \qquad (6.8.3)$$

(2) 磁偶极子

■类似电偶极子的定义，我们可将磁偶极子定义为十分靠近的一对等量异号磁荷：磁荷量为 q_m，距离为 l， 磁偶极矩大小为 $p_m = q_m l$，方向由负磁荷指向正磁荷。

■由电偶极子的分析结果，可类推出磁偶极子的磁场强度、在外磁场中受的力矩和力的表达式如下：

$$\boldsymbol{H} = -\frac{\boldsymbol{p}_m}{4\pi\mu_0 r^3} + \frac{3\boldsymbol{p}_m \cdot \boldsymbol{r}}{4\pi\mu_0 r^5}\boldsymbol{r}, \qquad (6.8.4)$$

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{p}_m \times \boldsymbol{H}, \qquad (6.8.5)$$

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{p}_m \cdot \nabla)\boldsymbol{H} = [\nabla(\boldsymbol{p}_m \cdot \boldsymbol{H})]_{\boldsymbol{p}_m} \qquad (6.8.6)$$

■对比磁矩为 $\boldsymbol{m}$ 的元电流环的有关公式：

$$\boldsymbol{B} = -\frac{\mu_0 \boldsymbol{m}}{4\pi r^3} + \frac{3\mu_0 \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{r}}{4\pi r^5}\boldsymbol{r}, \qquad (6.8.7)$$

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}, \tag{6.8.8}$$

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{m} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} = [\nabla(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B})]_{\boldsymbol{m}} \tag{6.8.9}$$

■发现，只要建立**磁荷法**中的$\boldsymbol{H}$、p_m **与电流法**中的$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{m}$之间的如下对应关系：

$$\boldsymbol{H} \leftrightarrow \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}, \qquad p_m \leftrightarrow \mu_0 \boldsymbol{m}, \tag{6.8.10}$$

两组公式将彼此等效，即所求得的$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{L}$、$\boldsymbol{F}$ 完全一样。式（**6.8.10**）中出现的因子 μ_0 无关紧要，它完全由所选择的单位制所决定。

■**磁偶极子**和**元电流环**之间的上述**等效关系十分重要**。有了这种等效关系，我们就可把磁介质分子或看成是磁偶极子，或看成是环电流，这两种观点在描述磁介质和外场的相互作用方面完全等效。而**磁荷法与电流法的等效性**，也**正是基于磁偶极子和元电流环之间的等效关系**，本节第二部分将对此作出说明。

(3) 磁介质的“磁极化”规律

■磁介质在外磁场中的“磁极化”和6.2节提到的磁化是同一物理现象的不同叫法。之所以这里称为“磁极化”，是为了和电介质在外电场中的“电极化”相类比。

■另外，按磁荷观点处理磁介质，磁介质分子被等效为磁偶极子，其在外磁场作用下的行为和电介质分子作为电偶极子在外电场作用下的行为类似，故均称为“极化”。讨论磁介质的“磁极化”规律完全遵循电介质的电极化讨论步骤去进行。下面我们只列出结果而不作详细论述。

■描述磁介质磁极化状态的量称为磁极化强度 $\boldsymbol{J}$，它定义为单位体积中全部分子磁偶极矩的矢量和，并且可以得到与$\boldsymbol{M}$的关系：

$$\boldsymbol{J}=\frac{\Sigma \boldsymbol{p}_{m\text{分子}}}{\Delta V}=\frac{\sum \mu_0 \boldsymbol{m}}{\Delta V}=\mu_0 \boldsymbol{M}. \qquad (6.8.11)$$

磁极化强度和极化磁荷存在如下关系：

$$\oiint_S \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{S}=-\sum_{S\text{内}} q'_m \qquad (6.8.12)$$

$$\sigma'_m = \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}. \qquad (6.8.13)$$

磁介质的磁极化规律表示为:

$$\boldsymbol{J} = \chi_m \mu_0 \boldsymbol{H}, \qquad (6.8.14)$$

式中为磁极化率 χ_m 。下面将会看到，它实际上就是6.4节中提及的磁化率。

(4) 磁介质中静磁场的高斯定理

仿照电位移矢量的引入过程，我们定义辅助矢量:

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{J}, \qquad (6.8.15)$$

称为磁感应强度。将式（6.8.15）和式（6.8.12）代入式（6.8.1），考虑到自由磁荷不存在，即 $q'_m = q_m$，有:

$$\oiint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = 0 \qquad (6.8.16)$$

将式（6.8.14）代入式（6.8.15）得:

$$B = \mu H \qquad (6.8.17)$$

式中

$$\mu = \mu_0(1+\chi_m) \qquad (6.8.18)$$

称为磁导率。以上三个表达式与电流法中B的表达完全一致。

二、磁荷法和电流法的等效性

对应关系式（6.8.11）便是磁荷法和电流法之间的桥梁:

$$J = \mu_0 M. \qquad (6.8.19)$$

将上式代入式（6.8.14）得:

$$M = \chi_m H. \qquad (6.8.20)$$

此地按磁荷定义的*H*和引入的*B*与按电流观点得到的*B*和引入的*H*之间的区别仅仅在于*H*满足不同的环路定理:

对磁荷法，$\boldsymbol{H}$满足的环路定律为：

$$\oint_L \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = 0 \qquad (6.8.2)$$

对电流法则有：

$$\oint_L \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \sum I_0 \qquad (6.8.21)$$

■这一差别告诉我们两点：

第一点，对有传导电流存在的空间，磁荷法因无法反映由（6.8.21）描述的磁场的有旋性质而失效，我们只能用电流法来求解传导电流所在空间的静磁场问题。

第二点，对不存在传导电流的单连通空间（该空间中可允许磁介质存在），式（6.8.21）回到式（6.8.2），以至由静磁场的唯一性定理，磁荷法和电流法将获得同一静磁场解。正是从这个意义上，我们说两种方法是等效的。

■在运用磁荷法处理静磁场问题时，首先必须把讨论严格限于没有传导电流的单连通空间。

- 其次，对于该单连通空间以外的传导电流，应设法找到与之等效的磁荷分布。对于稳恒电流系统，与之等效的磁荷分布总是可以找到的。理由是：由稳恒电流的闭合性，总可以把它分解为许多元电流环的叠加；而由前述元电流环和磁偶极子的等效性，诸元电流环(即磁矩）可全部用磁偶极子等效。

三、 磁荷法的应用

- 从某种意义上说，磁荷法在解答静电场问题和静磁场问题之间搭起一座桥梁，它使得这两类不同性质的物理问题可以互相借用对方的解法和现成结果。

- 磁荷法得到的静磁场解同静电场解之间存在一一对应的关系。只要按照下面的表6.2所列的对应关系进行变量替换，就由静磁场解求得静电场解，反之亦然。

■对于**磁化强度已知的磁介质**，我们**或者**按式（**6.2.5**）和式（**6.2.6**）求其**磁化电流**分布，**或者**按式（**6.8.12**）和式（**6.8.13**）求其**极化磁荷**分布。然后分别运用电流法和磁荷法求解。在碰到实际问题时，**哪种方法简便，就采用哪种方法**。

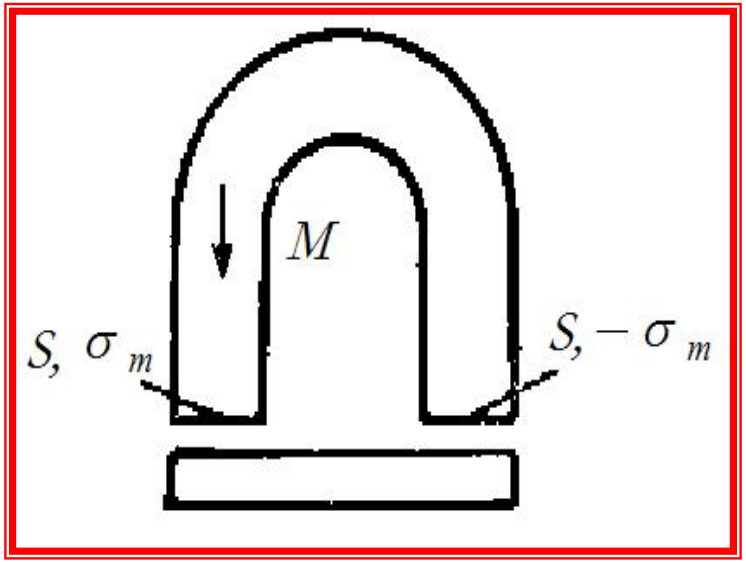
表6.2　静磁量和静电量的替换关系

静磁量	H	B	J	φ_m	σ_m	ρ_m	μ_0	μ	χ_m
静电量	E	D	P	Q	σ	ρ	ε_0	ε	χ_e

[例6.13]　一马蹄形永久磁铁，两磁极总面积为$2S$，磁化强度为M，求它对衔铁的吸力。

[解]　本题用电流法求解相当麻烦，而**用磁荷法**则十分简便。如右图，在马蹄形磁铁两端表面上的极化面磁荷密度为：

$$\sigma_m = J = \mu_0 M$$



由于衔铁和磁极靠得很近，则在衔铁与磁极的接触部分会感应出反号面磁荷，其吸力可由电容器两极板间的静电吸力表达式（见第三章**3.6**节例**3.6**）加倍：

$$F_e = -2 \cdot \frac{\sigma_e^2 S}{2\varepsilon_0} = -\frac{\sigma_e^2 S}{\varepsilon_0}$$

并通过表**6.2**给出的替换关系求得静磁力，结果为:

$$F_m = -\frac{\sigma_m^2 S}{\mu_0} = -\mu_0 M^2 S$$

[例6.14] 求平行板电容器边缘附近的电场分布（体现边缘效应）。设极板间距为d，面电荷密度为$\pm\sigma_e$。计算中，设场点离电容器边缘的距离r远大于d，但远小于极板尺寸。

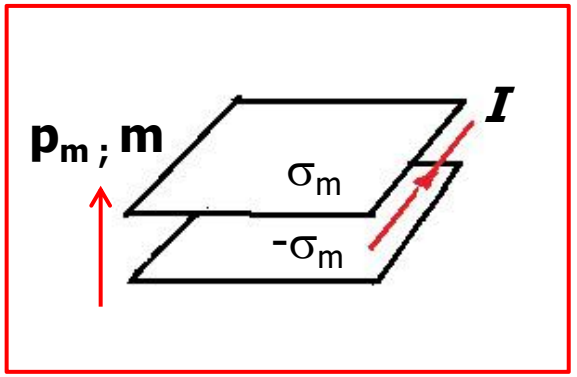
[解] 根据题意，要计算的是两半无限平面电荷在空间的电场，该电场原则上可由面电荷电场公式计算，但要求进行复杂的面积分运算。下面改用磁荷法求解。

■首先，将上述平面电荷分布代之以几何位形相同的平面磁荷分布，面磁荷密度设为 σ_m，见右下图。于是，面元 ΔS 的磁偶极矩为：

$$p_m = \sigma_m d\Delta S.$$

■进一步将上述磁偶极子用元电流环等效：电流强度设为**I**，磁矩为 $m = I\Delta S$。由对应关系（**6.8.10**），可推得：

$$\mu_0 m = p_m;\quad \mu_0 I\Delta S = \sigma_m d\Delta S,$$



■将磁荷与电流联系起来，即得：

$$I = \frac{\sigma_m d}{\mu_0}.$$

上述元电流相互毗连，邻接线上电流互抵，剩下**一条沿电容器边缘的无穷长直线电流*I***，该电流在无穷远(沿电容器边缘周线)闭合。当考察点(即场点)远大于*d*并远小于极板尺寸时，其磁场表达式为：

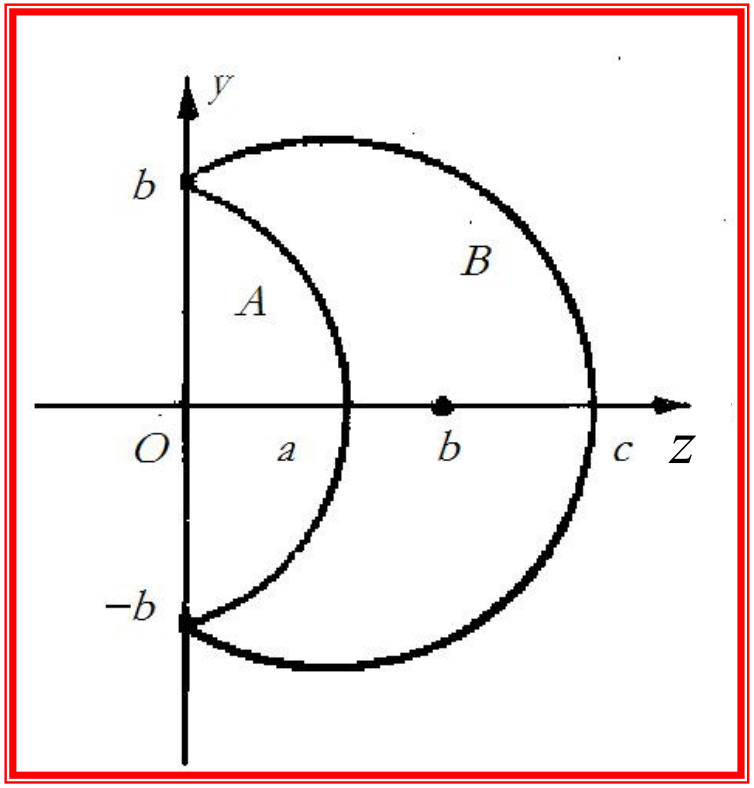
$$H = \frac{I}{2\pi r} = \frac{\sigma_m d}{2\pi\mu_0 r}.$$

（在真空中，磁荷法中的**H**、**B**与电流法的相同）

按表6.2所列的替换关系，可求得相应电荷分布的电场表达式：

$$E = \frac{\sigma_e d}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

[例6.15] 如右下图，两无穷长圆弧柱面、片状带电导体A和B互相绝缘，两侧棱边在y轴上处十分靠近，顶部则与z轴分别交于a和c。已知 $a = 0.4$ cm，$b = 0.5$ cm，$c = 0.8$ cm，$z = b$处的电场强度为$E_b = 8000\ \mathrm{V\cdot cm^{-1}}$，求两导体$A$和$B$间的电势差。



[解] 本题归结为求A、B两等势面之间的电场分布。假设B板带正电，A板带负电；由电荷转成磁荷。

◆ 同上例题对应位于y轴上有两无穷长反向直线电流（b处流出，-b处流入），可用安培环路定理，写出各磁场分量的表达式。接着

- 可以证明**全部磁场线**均与通过的**任意圆弧柱面正交**，相应这些**圆弧柱面正好就是等磁势面**。于是，将**静电场问题**转变成**求静磁场问题**，易求得上述两无穷长反向直线电流在 z 轴上的磁场为：

$$H_z = \frac{bI}{\pi(b^2 + z^2)} = \frac{2H_b}{1+(z/b)^2},$$

式中 I 为电流强度，$H_b = I/(2\pi b)$ 为 $z = b$ 处的磁场强度。

- 根据表6.2将上式转换成：

$$E_z = \frac{2E_b}{1+(z/b)^2},$$

它将能实现 A、B 为等势面及在 $z = b$ 处场强为 E_b 的条件，因而构成原静电场问题在 z 轴上的解。

- 于是，导体 A、B 之间的电势差为：

$$V_{AB}=\int_a^c \frac{2E_b}{1+(z/b)^2}dz=2bE_b\arctan\left(\frac{z}{b}\right)_a^c$$

$$=2bE_b\arctan\left[\frac{b(c-a)}{b^2+ac}\right].$$

■ 将a = 0.4 cm，b = 0.5 cm，c = 0.8 cm，E_b= 8000 V • cm^{-1}

代入上式，注意arctan的值用弧度！可得$V_{AB}=2.7\times10^3$ V。

注意！本题A、B之间的空间为单连通空间，其中不存在传导电流，符合磁荷法和电流法等效性的必要条件。

[例6.16] 用磁荷法求小载流线圈在非均匀外磁场中所受的力.

[解] 由电偶极子在外电场中的受力公式(见第二章2.2节例2.2)：

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}$$

利用表6.2给出的替换关系得磁偶极矩为p_m的磁偶极子在外磁场H中的受力为:

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{p}_m\cdot\nabla)\boldsymbol{H}$$

再由式(6.8.10)给出的对应关系，将上式改写为对应的磁矩的受力公式:

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$$

它即式(6.1.10)。